Markowe
Wykłady
z **M**atematyki

Markowe Wykłady z Matematyki

algebra z geometrią

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Zdjęcie na okładce
Artur Zakrzewski

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.

ISBN 978–83–62780–35–8

Wydanie I, Wrocław 2015
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że [...] są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

Tymczasem Émilie [Markiza du Châtelet] zajmuje się algebrą, co będzie bardzo jej pomocne w życiu, a nadto przyda uroku w towarzystwie.

Voltaire, *Listy*

Spis treści

Wstęp

Mam nadzieję, że student nauczy się tu, że rachunki nie są ani głównym sposobem uprawiania matematyki, ani jej głównym celem, ani też główną radością, jaką daje matematyka.

Robert J. Valenza, *Linear Algebra*,
Springer Verlag 1993

Intuicja przestrzenna czy też percepcja przestrzeni (...) to niezwykle skuteczne narzędzie, i dlatego geometria jest tak istotną częścią matematyki — nie tylko dla rzeczy oczywiście geometrycznych, ale nawet dla takich, które geometryczne nie są. Próbujemy nadać im geometryczną postać, gdyż pozwala nam to korzystać z naszej intuicji.

Michael Atiyah,
Mathematical Evolutions, ed. Abe Schnitzer
and John Stillwell, MAA 2002

Książka może służyć jako podręcznik algebry liniowej i abstrakcyjnej, a także geometrii analitycznej dla studentów kierunków matematycznych i technicznych. Materiał z geometrii analitycznej staraliśmy się tu ograniczyć do minimum koniecznego w algebrze liniowej. W szczególności skrótowo potraktowane są krzywe stożkowe. Więcej powiemy o nich w kolejnym tomie, gdzie będzie można pokazać ich istotne zastosowania.

Wstęp do nowoczesnej matematyki

Dwa podstawowe działy matematyki, z jakimi styka się student, to analiza i algebra. Analiza powstała w odpowiedzi na ważne pytania mechaniki; w szczególności, dzięki pracom Newtona, pozwoliła zrozumieć podstawowe zasady ruchu planet.

Algebra jeszcze do niedawna definiowana była jako nauka o rozwiązywaniu równań i ich układów. Badania układów równań liniowych doprowadziły do odkrycia macierzy i wyznaczników, a dalsze próby geometrycznego spojrzenia na układy równań dały matematyce przestrzenie i przekształcenia liniowe. Z tematyki tej wyrosła **algebra liniowa**.

Z kolei wzory na pierwiastki równań algebraicznych trzeciego i czwartego stopnia wprowadziły do matematyki liczby zespolone. Próba znalezienia analogicznych wzorów dla równań piątego stopnia zrewolucjonizowała algebrę, koncentrując jej uwagę na **strukturach** algebraicznych takich, jak grupy, ciała czy pierścienie. Badaniem tych pojęć zajmuje się **algebra abstrakcyjna**.

Algebra liniowa dostarcza narzędzi przede wszystkim dla analizy, równań różniczkowych czy teorii prawdopodobieństwa; algebra abstrakcyjna wiąże się raczej z matematyka dyskretną. Ale ich wspólną cechą jest poziom abstrakcji, wyraźnie wyższy niż w przypadku analizy czy matematyki dyskretnej. Dzięki temu wykłady z algebry dają pierwsze wyobrażenie o charakterze **nowoczesnej matematyki**.

Ta nowoczesność ma swoją cenę. Na wykładach z analizy istotne zastosowania pojawiają się często bezpośrednio po wprowadzeniu odpowiedniego pojęcia, podobnie jest na matematyce dyskretnej. Algebra i geometria są (niestety!) zasadniczo inne. Pomiędzy pojawieniem się jakiegoś pojęcia a jego istotnym zastosowaniem upływają często tygodnie (czyli 50-60 stron książki). Tak więc Czytelnik powinien uzbroić się w cierpliwość.

Motywy przewodnie

Motywem przewodnim trzech początkowych części książki są **równania**. Mówimy tu o liczbach zespolonych (i równaniach algebraicznych trzeciego stopnia), o stożkowych (i równaniach drugiego stopnia o dwu zmiennych) o macierzach (i układach równań liniowych). Aby zbudować ogólną teorię układów równań liniowych wprowadzamy przestrzenie liniowe.

W trzech końcowych częściach dominują **przekształcenia**. W gruncie rzeczy rozwijamy tu na poziomie abstrakcyjnym dwie proste idee: proporcjonalności (część IV) i symetrii (część V). Te dwa motywy — równania i przekształcenia — łączą się w końcowych wykładach, poświęconych teorii Galois.

Rachunki w dobie komputera

Naszym podstawowym celem jest zrozumienie pojęć i związków między nimi. Im lepiej rozumiemy materiał, tym łatwiej dostrzegamy możliwe zastosowania.

Czasem jednak niezbędna jest pewna biegłość rachunkowa. W szczególności wymagane będzie swobodne operowanie liczbami zespolonymi i działaniami na małych macierzach. Jest to konieczne dla rozumienia algebry.

Unikamy zadań trudnych rachunkowo. Tam, gdzie jest to konieczne podpowiadamy odpowiednie instrukcje programu Wolfram Alpha®.

Zadania i dowody

Po każdym podrozdziale pojawia się seria zadań. Zadania umieszczone za potrójnym karo mogą wymagać pewnej pomysłowości, a zawsze rozumienia używanych pojęć. Staramy się, aby większość pojęć pojawiała się w różnych kontekstach; tam, gdzie to możliwe pokazujemy nietrywialne zastosowania. Na końcu książki do znacznej części zadań (zwłaszcza istotnych dla podstawowego opanowania materiału) dajemy odpowiedzi bądź wskazówki.

Większość twierdzeń podajemy z uzasadnieniem. Rzadko są to pełne, ścisłe dowody, ale warto je śledzić, aby zrozumieć, jak to wszystko działa.

Spiesz się powoli

Matthias Beck i Ross Geoghegan w książce *The Art of Proof* (Springer 2010) każdy rozdział kończą taką sama formułką: *Czytanie matematyki różni się od czytania powieści czy książek historycznych. Powinieneś myśleć powoli nad każdym zdaniem. Zazwyczaj będziesz musiał przestudiować ten sam materiał ponownie, często więcej niż raz.*

Uwagi autorów idealnie pasują do materiału zawartego w tych wykładach. Zatem spiesz się powoli.

Biogramy

Podobnie, jak we wcześniejszych tomach tego cyklu w książce przedstawiamy sylwetki najważniejszych matematyków związanych z wykładaną tematyką. Postacie omówione szerzej w poprzednich tomach cyklu (w tym Karol Fryderyk Gauss) nie mają osobnych biogramów tutaj. Wyjątkiem jest Arthur Cayley, który odegrał wybitną rolę zarówno w rozwoju algebry liniowej, jak też abstrakcyjnej.

Historia algebry jest wyjątkowo skomplikowana, rzadko można wskazany rezultat przypisać jednoznacznie konkretnemu matematykowi. Stąd też kilka biogramów (m.in. Banach, Hilbert, Noether) dotyczy postaci, które zadecydowały o kształcie współczesnej algebry i jej dzisiejszej pozycji, chociaż ich nazwiska nie występują w głównym tekście książki. Z podobnych powodów umiejscowienie notek biograficznych w tekście jest czasem dość przypadkowe.

Uwagi dla wykładowców

Materiał książki pozwala w naturalnym tempie realizować roczny kurs algebry liniowej i abstrakcyjnej, a także semestralny kurs algebry abstrakcyjnej. Prawdopodobnie najczęściej wykorzystywany będzie jako podstawa do semestralnego kursu *Algebra z geometrią analityczną*. Taki kurs zazwyczaj ma program dość napięty i słabo umotywowany. Przy zachowaniu troski o motywację można go poprowadzić (przy minimalnych cięciach) na podstawie wykładów 1-14 oraz 16-18, przy łączeniu wykładów 8-9 oraz 11-12. Łączone wykłady wymagać będą oczywiście pominięcia części rozumowań lub innych elementów.

♢ ♢ ♢

W poprzednich tomach starałem się w tym miejscu wskazać najważniejsze inspiracje. Spróbuję to zrobić i teraz. Części poświęcone algebrze liniowej na pewno sporo zawdzięczają podręcznikom Davida Poole'a *Linear algebra* i Thomasa S. Shoresa *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Pracując nad algebrą abstrakcyjną korzystałem z *Groups and Symmetry* M. A. Armstronga, *Algebra and Geometry* Alana F. Beardona, *Abstract Algebra* Ronalda Solomona oraz *Symmetry* Kristophera Tappa.

Motto z Voltaire'a podpowiedziała mi książka Jerzego Kierula *Émilie du Châtelet i Voltaire* (PIW 2014).

Na zakończenie chciałbym podziękować moim Kolegom i zarazem Redaktorom-Wydawcom książki Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczylasowi. Pierwszy z nich zajął się przede wszystkim redakcją techniczną książki, w szczególności wykonał rysunki. Drugi zajmował się redakcją merytoryczną i językową. Podpowiedzieli też kilka ciekawych zadań. Dzięki ich zaangażowaniu udało się wygładzić styl, poprawić układ graficzny, a także usunąć wiele potknięć językowych, pomyłek w składzie i — czasem subtelnych — błędów merytorycznych. Bardzo dziękuję za tę ogromną pracę, tym bardziej, że upalne lato 2015 zupełnie pracom redakcyjnym nie sprzyjało.

Doświadczenie i teoria prawdopodobieństwa podpowiadają, że wiele innych błędów pozostało — mam nadzieję, że niegroźnych. Oczywiście odpowiada za nie wyłącznie autor.

M.Z.

I

Liczby zespolone i równania

Pomyśl sobie: w takim rachunku występują z początku całkiem solidne liczby, które mogą przedstawiać metry, ciężary lub coś innego, równie realnego, i przynajmniej są prawdziwymi liczbami. Przy końcu rachunku też są takie liczby. Ale te liczby łączy coś, czego nie ma. Czy to nie jest jak most, w którym jest tylko pierwsze i ostatnie przęsło, a przez który przechodzi się mimo to tak pewnie, jak gdyby stał cały? Dla mnie w takim rachunku jest coś, co powoduje zawrót głowy, jak gdyby kawałek drogi prowadził Bóg wie dokąd.

Robert Musil, Niepokoje wychowanka Törlessa,
przekł. Wandy Kragen, Wydawnictwo Literackie,
Kraków 1993.

Algebra z dawien dawna zajmowała się rozwiązywaniem równań i ich układów. Współczesne definicje algebry określają ją znacznie szerzej i bardziej abstrakcyjnie. Te bardziej abstrakcyjne elementy będą wyraźne począwszy od trzeciej części książki. Ale nasz kurs zaczyna się i kończy równaniami.

Punktem wyjścia są równania jednej zmiennej. Już wzory na równania trzeciego stopnia wymagają wprowadzenia nowego rodzaju liczb — liczb zespolonych. Same wzory są całkowicie niepraktyczne, więc nie będziemy się nimi zajmować. Ale liczby zespolone okazały się ważnym narzędziem nie tylko w matematyce, ale również fizyce i naukach technicznych. Poświęcamy im trzy początkowe wykłady.

W wykładzie 4. przechodzimy do równań algebraicznych o dwu niewiadomych. Rozwiązaniem takiego równania jest zawsze pewien podzbiór płaszczyzny, tak więc w istocie są to zagadnienia geometryczne. Ograniczamy się tu do równań pierwszego i drugiego stopnia — ich rozwiązaniami są zazwyczaj proste i krzywe stożkowe (elipsa, hiperbola i parabola).

Wraz z przejściem do dwu (i więcej) zmiennych algebra w istocie zaczyna być geometrią. Ta płynność pomiędzy algebrą — czyli przekształcaniem wyrażeń a geometrią — czyli wyobrażeniami przestrzennymi, będzie widoczna także w dalszych częściach książki.

Równania kwadratowe rozwiązywali już Babilończycy — ok. 4000 lat temu, i starożytni Grecy — ok. 2500 lat temu. W XVI w. matematycy włoscy odkryli metody rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia, przy okazji wprowadzając liczby zespolone. W XVII w. Kartezjusz i Fermat pokazali, jak na język algebry przełożyć problemy klasycznej geometrii.

Geometria osiągnęła niemal doskonałość już w *Elementach* Euklidesa (ok. 300 p.n.e.). Także krzywe stożkowe znane były już starożytnym Grekom, a w traktacie *Stożkowe* Apoloniusza z Pergi (ok. 200 p.n.e.) ich teoria osiągnęła poziom bardzo zaawansowany. W XVII w. stały się na nowo jednym z zasadniczych tematów geometrii, dzięki geometrii analitycznej, prawom Keplera i teorii grawitacji Newtona.

W tych początkowych wykładach próbujemy zbliżyć Czytelnika do poziomu, jaki algebra osiągnęła ok. roku 1800.

Wykład 1

Liczby zespolone

Liczby zespolone pojawiły się w związku z rozwiązywaniem równań trzeciego stopnia. W połowie XVI w. matematycy włoscy odkryli wzory na pierwiastki równań trzeciego stopnia, zwane dziś wzorami Cardana. Wzory te wymagają operowania pierwiastkami kwadratowymi z liczb ujemnych, chociaż końcowy wynik jest liczbą rzeczywistą. Na przykład, jednym z pierwiastków rzeczywistych równania $x^3 = 15x + 4$ jest $x = 4$, a wzory Cardano dają go w postaci

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \left(2+11\sqrt{-1}\right) + \left(2-11\sqrt{-1}\right).$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc jasne jest, że pierwiastkowanie liczb ujemnych wymaga wprowadzenia nowych liczb.

1.1 Działania na liczbach zespolonych

Co to są liczby zespolone? - Cztery podstawowe działania - Pierwiastkowanie - Rozwiązywanie równań kwadratowych - Zadania

Od momentu pojawienia się liczb zespolonych do podania ich ścisłej definicji upłynęło ponad 200 lat. My też wprowadzimy je w sposób nieformalny. W dalszej części wykładu zastanowimy się, jak nadać im sens.

Co to są liczby zespolone?

Przyjmijmy, że istnieje liczba i taka, że $i^2 = -1$. Jeżeli mamy na niej swobodnie wykonywać działania, to musimy zaakceptować też istnienie liczb postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby tej postaci nazywamy **liczbami zespolonymi**. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$ (z ang. *complex numbers*).

Dla liczby zespolonej $a+bi$ określamy jej **część rzeczywistą** (*real*) oraz **część urojoną** (*imaginary*) wzorami

$$\mathrm{Re}(a+bi)=a, \qquad \mathrm{Im}(a+bi)=b.$$

Na przykład $\mathrm{Re}(2-3i)=2$, $\mathrm{Im}(2-3i)=-3$. Zwróć uwagę, że część urojona liczy zespolonej to sam *współczynnik* przy i, więc także ona jest liczbą rzeczywistą.

Dwie liczby zespolone $a+bi$ oraz $c+di$ uznajemy za równe, gdy $a=c$ oraz $b=d$, czyli gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe.

Zamiast pisać $a+0i$, gdzie $a\in\mathbb{R}$, piszemy a. Tak więc każda liczba rzeczywista jest też liczbą zespoloną.

Cztery podstawowe działania

Dodawanie, **odejmowanie** i **mnożenie** liczb zespolonych określamy następująco:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&=(a+c)+(b+d)i;\\(a+bi)-(c+di)&=(a-c)+(b-d)i;\\(a+bi)(c+di)&=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

Określenia dodawania i odejmowania nie wymagają komentarza. Na przykład

$$(1-2i)+(-2+i\sqrt{3})=-1+(-2+\sqrt{3})i, \qquad (1-2i)-(-2+\sqrt{3})=3-(2+\sqrt{3})i.$$

Wzoru na mnożenie nie musimy pamiętać. Wystarczy zrozumieć, skąd wzięło się takie określenie:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Na przykład

$$(3+i)(4-5i)=3\cdot4-3\cdot5i+4i-5i^2=12-15i+4i-(-5)=17-11i.$$

Dla mnożenia liczb zespolonych zachodzą wszystkie prawa działań dla liczb rzeczywistych, w tym wzory skróconego mnożenia. W szczególności, ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$(c+di)(c-di)=c^2-(di)^2=c^2-d^2i^2=c^2+d^2.$$

Teraz możemy już pokazać, jak wygląda **dzielenie** liczb zespolonych. Wykorzystujemy tu chwyt, znany z usuwania niewymierności w mianowniku:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Mało kto pamięta wyprowadzony wyżej wzór na dzielenie. Zazwyczaj przy każdym dzieleniu po prostu wykonujemy rachunki podobne do powyższych:

$$\frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{1+5i}{3^2+2^2} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Zauważmy, że dzielenie nie jest wykonalne tylko, gdy $c^2 + d^2 = 0$, tzn. dla $c = d = 0$. Zatem dzielić można przez dowolną liczbę zespoloną różną od zera.

Pierwiastkowanie

Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy dowolną liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. W wykładzie 2. pokażemy, że liczba zespolona różna od zera ma n pierwiastków stopnia n.

Łatwo sprawdzić, że są dwa pierwiastki kwadratowe z liczby -1. Są nimi liczby i oraz $-i$. Nietrudno też przekonać się, że są cztery pierwiastki stopnia 4 z jedynki: 1, i, -1 oraz $-i$.

Na przykładzie $\sqrt{3+4i}$ pokażemy, jak obliczyć pierwiastek kwadratowy z dowolnej liczby zespolonej. Niech $x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem, tzn. $(x + yi)^2 = 3 + 4i$. Zatem $(x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i$, czyli

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $y = 2/x$. Podstawiając do pierwszego otrzymamy

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3, \qquad \text{czyli} \qquad x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Podstawienie $t = x^2$ prowadzi do równania $t^2 - 3t - 4 = 0$, skąd $t = 4$ lub $t = -1$. Zatem $x^2 = 4$ lub $x^2 = -1$.

Liczby x oraz y są rzeczywiste, więc tylko pierwsze z równań odpowiada warunkom zadania. Tak więc $x = 2$, $y = 1$ albo $x = -2$, $y = -1$. Otrzymujemy dwa pierwiastki $2 + i$ oraz $-2 - i$.

W podobny sposób można pokazać, że każda liczba zespolona różna od zera ma dwa pierwiastki zespolone. Pierwiastkami wyższych stopni zajmiemy się w następnym wykładzie.

Rozwiązywanie równań kwadratowych

Znany wzór na pierwiastki równania $az^2+bz+c=0$ przyjmuje teraz prostszą postać

$$z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ \text{gdzie } \Delta=b^2-4ac.$$

Zwróćmy uwagę, że przed $\sqrt{\Delta}$ nie ma znaku $\pm$. Wynika to stąd, że w zbiorze liczb zespolonych sam pierwiastek oznacza każdą z *dwu* wartości. W szczególności $\sqrt{-1}$ oznacza zarówno i, jak też $-i$.

Na przykład rozwiązaniem równania $z^2+2z+2=0$ jest

$$z=\frac{-2+\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{-1}}{2}=-1+\sqrt{-1}=-1\pm i.$$

Zadania

1. Oblicz:

a) $(2+i)(3-2i)$; b) $(5+2i)(5-2i)$; c) $(3+2i)^2-(3-2i)^2$; d) $(1-i\sqrt{2})^3$.

2. Wykonaj dzielenia:

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$; b) $\dfrac{11+3i}{2+i}$; c) $\dfrac{-11+7i}{2+6i}$; d) $\dfrac{3+2i}{-1+3i}$.

3. Wiedząc, że $a,b\in\mathbb{R}$ znajdź część rzeczywistą i część urojoną liczb:

a) $i(a+bi)$; b) $(a+bi)^2$; c) $(a+bi)(ai+b)$; d) $(a+bi)^3$.

4. Oblicz:

a) $\sqrt{8+6i}$; b) $\sqrt{5-12i}$; c) $\sqrt[3]{-8}$.

5. Sprawdź, że $2+i$ jest jednym z pierwiastków sześciennych z liczby $2+11i$. Odgadnij jeden z trzech pierwiastków sześciennych z liczby $2-11i$.

6. Rozwiąż równania:

a) $z^2-2z+2=0$; b) $2z^2+2z+1=0$; c) $z^2-8zi=25$; d) $z+\dfrac{1}{z}=1$.

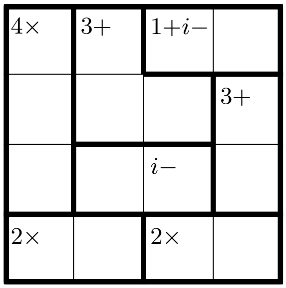
◇ ◇ ◇

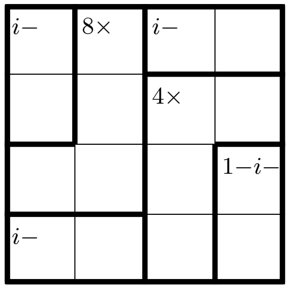
7. Jakie wartości może przyjmować suma $1+i+i^2+\ldots+i^n$?

8. Sprawdź, że $1+i$ jest pierwiastkiem czwartego stopnia z liczby -4. Znajdź trzy pozostałe pierwiastki.

9. (Cardano, *Ars magna*, 1545) Podziel liczbę 10 na dwie tak, aby ich iloczyn równy był 40.

10. W japońskiej łamigłówce *KenKen* mamy wypełnić kwadrat (u nas 4×4) liczbami tak, aby w każdym obszarze zaznaczonym obwódką otrzymać żądany wynik działania. Na przykład trzy pola w lewej kolumnie mają dać iloczyn 4, a dwa górne prawe różnicę $1+i$. Rozwiąż poniższe łamigłówki używając liczb 1, $1+i$, $1-i$ oraz 2.





1.2 Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone jako punkty płaszczyzny - Moduł i sprzężenie - Zadania

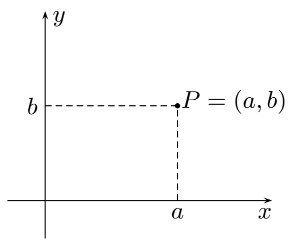
Prowadzone przed chwilą rachunki sceptyk może zakwestionować: jak można prowadzić rachunki na liczbach, których nie ma? Teraz nadamy tym liczbom sens.

Liczby zespolone jako punkty płaszczyzny

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy liczbami rzeczywistymi a punktami prostej (dokładniej: punktami osi liczbowej). Innymi słowy: punktom osi liczbowej odpowiadają liczby rzeczywiste. Podobnie liczby zespolone możemy traktować jako punkty płaszczyzny z odpowiednio określonymi działaniami.

Rozważmy płaszczyznę z układem współrzędnych. Oznaczmy punkt $P = (a, b)$ symbolem $a + bi$ i wprowadźmy na punktach-liczbach dwa działania:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$



Na mocy powyższej definicji mnożenia kwadratem punktu-liczby $i = 0 + 1i$ jest $i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$. Widzimy zatem, że zbiór punktów płaszczyzny z tak określonymi działaniami daje nam liczby zespolone.

Przy geometrycznej interpretacji liczb zespolonych oś poziomą nazywamy **osią rzeczywistą**, a pionową — **osią urojoną**.

Moduł i sprzeżenie

Sprzężeniem liczby zespolonej $a+bi$ nazywamy liczbę $\overline{a+bi} = a - bi$. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 mamy

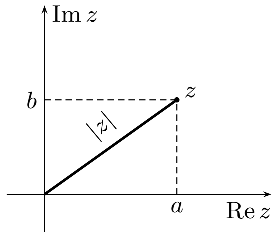
$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Analogiczne równości zachodzą dla odejmowania, a przy założeniu, że $z_2 \neq 0$ — także dla dzielenia.

Modułem liczby zespolonej $a+bi$ nazywamy jej odległość od zera, tzn.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zauważmy, że moduł rozszerza pojęcie wartości bezwzględnej dla liczb rzeczywistych.



Podobnie jak w przypadku modułu liczby rzeczywistej, odległość liczb z_1, z_2 na płaszczyźnie zespolonej jest równa modułowi różnicy $|z_2 - z_1|$.

Bezpośrednio z definicji wynika prosta zależność

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Rzeczywiście, dla $z = a + bi$ mamy

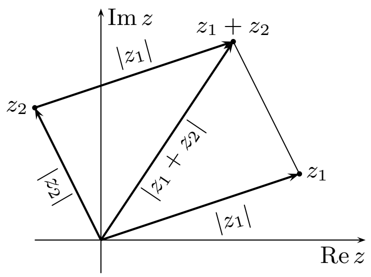
$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Twierdzenie 1.1 (podstawowe własności modułu)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą równości

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1||z_2|, \\ |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2|, \text{ o ile } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Ponadto zachodzi tzw. **nierówność trójkąta**

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$



Dowód: Ponieważ moduł jest liczbą nieujemną, więc dla dowodu pierwszej równości wystarczy pokazać, że kwadraty wyrażeń po obu stronach są równe:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Z kolei na mocy pierwszej równości

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2| = \left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = |z_1|,$$

skąd wynika prawdziwość drugiej.

Nierówność trójkąta jest geometrycznie oczywista. Formalny dowód algebraiczny można otrzymać korzystając z nierówności Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza (p. str. 130).

Zadania

11. Jak wygląda zbiór liczb zespolonych opisany warunkiem:

a) $\overline{z} = z$; b) $\overline{z} = iz$; c) $z\overline{z} = 1$; d)* $z + \overline{z} = z\overline{z}$?

12. Znajdź moduł liczby:

a) $-3 + 4i$; b) $\sqrt{3} - i$; c) $(1+i)(1+2i)$; d) $\dfrac{5+12i}{12-5i}$.

13. Korzystając z geometrycznej interpretacji modułu różnicy zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór tych z, dla których:

a) $|z| \leqslant 1$; b) $|z - (1+i)| = 1$; c) $|z+i| = |z-1|$; d) $|z-1| + |z-i| = \sqrt{2}$.

14. Sprawdź, że dla dowolnej liczby zespolonej z liczby $z + \overline{z}$ oraz $z\overline{z}$ są rzeczywiste.

15. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 liczba $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ jest rzeczywista. Wsk. Pokaż, że jest równa swojemu sprzężeniu.

♢ ♢ ♢

16. Pokaż, że jeżeli suma oraz iloczyn dwu liczb nierzeczywistych jest rzeczywista, to jedna z tych liczb jest sprzężeniem drugiej.

17. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:
a) półpłaszczyznę złożoną z punktów leżących powyżej prostej $y = x + 1$;
b) odcinek domknięty o końcach i oraz 1.

18. Łatwo sprawdzić, że przekształcenie płaszczyzny dane wzorem

$$\varphi(z) = \overline{z}$$

to symetria względem osi rzeczywistej. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:
a) symetrię względem prostej $\operatorname{Im} z = 1$;
b) symetrię względem osi urojonej;
c) symetrię względem prostej $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.

19.* Rozważmy przekształcenie płaszczyzny zespolonej $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$. Oczywiście okrąg $|z| = a$ przejdzie przy tym przekształceniu na okrąg $|z| = 1/a$.
a) Na jaką figurę przejdzie przy tym przekształceniu okrąg $|z-1| = 1$?
b) Obrazem jakiej figury będzie prosta $\operatorname{Im}(z) = 1$?

1.3 Matematycy włoskiego renesansu

W swym traktacie *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) **Luca Pacioli (1445-1517)** pisał, że rozwiązanie równania trzeciego stopnia leży poza zasięgiem ludzkiego umysłu. Ale już kilkadziesiąt lat później problem ten został rozwiązany przez jego rodaków. Historia odkrycia wzorów na pierwiastki równań trzeciego stopnia jest dość skomplikowana, jej bohaterami są m.in. Scipione del Ferro, Tartaglia i Cardano.

Scipione del Ferro (1465-1526), w latach 1496-1526 wykładowca arytmetyki i algebry na Uniwersytecie w Bolonii. Nie pozostawił po sobie żadnych manuskryptów ani publikacji drukowanych. Uchodzi za rzeczywistego odkrywcę tzw. wzorów Cardana.

Niccolo Fontana, zw. Tartaglią (1499-1567), syn listonosza, w zasadzie samouk (jeśli wierzyć jego autobiografii, to w szkole poznał alfabet do litery K, gdyż na dalszą naukę nie było go stać). Większość życia żył z nauczania matematyki — najpierw w Weronie, potem w Wenecji. Umarł w biedzie. Niezależnie od Scipione del Ferro odkrył metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Jest też autorem pierwszego przekładu *Elementów* Euklidesa na język nowożytny.

Girolamo Cardano (1501-1572), doktor medycyny, jeden z najwyżej cenionych lekarzy ówczesnej Europy. Profesor medycyny na uniwersytetach Pawii i Bolonii. Autor ponad 200 dzieł z zakresu medycyny, matematyki, fizyki, religii i muzyki. Do historii wszedł dzięki poświęconemu algebrze traktatowi *Ars Magna*, gdzie przedstawił metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Znajomość metody zawdzięczał Tartaglii (do czego uczciwie się przyznaje), który jednak nigdy nie wyraził zgody na jej upublicznianie. Cardano jest także jednym z prekursorów rachunku prawdopodobieństwa. Ma też znaczący wkład w mechanikę praktyczną — od niego pochodzi tzw. wał Cardana. Życie prywatne Cardana było wyjątkowo barwne, ale tragiczne. Jego syn został skazany na karę śmierci pod zarzutem otrucia żony, a sam Cardano spędził sporo czasu w więzieniu za sporządzenie horoskopu Chrystusa.

Rafael Bombelli (1526-1576), inżynier i matematyk. Znaczną część życia spędził nadzorując prace związane z osuszaniem bagien. Gdy z przyczyn technicznych trzeba było je przerwać, zajął się pracą nad podręcznikiem algebry. Jego *Algebra* (1572) to starannie napisany podręcznik, wysoko ceniony jeszcze przez Leibniza, sto lat później. Bombelli zrozumiał, że wzory Cardana można stosować także wówczas, gdy w rachunkach pojawiają się pierwiastki z liczb ujemnych, i w ten sposób wprowadził do matematyki liczby zespolone.

Wykład 2

Wzór de Moivre'a i pierwiastki z jedności

Każdy rodzaj liczb znanych ze szkoły ma jakąś wadę. Liczb naturalnych nie można odejmować, liczb całkowitych dzielić, pierwiastkowanie liczb wymiernych wymaga wprowadzenia liczb niewymiernych, a dla ujemnych liczb rzeczywistych nie ma pierwiastków.

Liczby zespolone zostały wprowadzone, aby każda liczba miała pierwiastek *kwadratowy*. Okazuje się jednak, że można z nich wyciągać pierwiastki dowolnego stopnia. Tak więc w zbiorze liczb zespolonych wykonalne jest pięć działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie (z oczywistym wyjątkiem dzielenia przez zero) i pierwiastkowanie. Można przyjąć, że w tym momencie proces tworzenia liczb został zakończony.

2.1 Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a

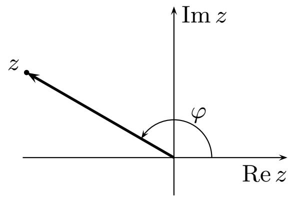
Postać trygonometryczna - Wzór de Moivre'a - Zadania

W poprzednim wykładzie liczby zespolone zapisywaliśmy w postaci $a + bi$, zwanej **postacią algebraiczną**. Teraz poznamy dwa dalsze sposoby zapisu: postać trygonometryczną (bardzo ważną) i wykładniczą. Wzór de Moivre'a ułatwia potęgowanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej.

Liczby zespolone w postaci algebraicznej łatwo dodawać i odejmować, ale trudno mnożyć, dzielić i potęgować. Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej łatwo jest mnożyć, dzielić i potęgować, trudniej dodawać i odejmować.

Postać trygonometryczna

Niech $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ będzie liczbą zespoloną różną od zera. Wówczas jej położenie na płaszczyźnie zespolonej można określić za pomocą dwu parametrów: odległości od początku współrzędnych — czyli modułu liczby oraz kierunku promienia wodzącego tej liczby.



Kierunek określamy za pomocą kąta φ, jaki promień wodzący tworzy z dodatnią półosią osi Ox. Kąt ten nazywamy **argumentem** liczby $z = x + yi$. Formalnie, argument określają warunki

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Jeśli jakiś kąt φ jest argumentem danej liczby zespolonej, to także $\varphi + 2k\pi$ jest jej argumentem. Najmniejszy nieujemny argument liczby z nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy symbolem $\arg z$. Np. $\arg(1 + i) = \pi/4$.

Zauważmy, że dla $z \neq 0$ mamy

$$z = x + yi = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

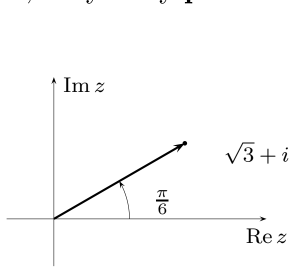
Zapis liczby zespolonej w postaci

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie r jest modułem liczby z, a φ jej argumentem, nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby z.

W najprostszych przykładach postać trygonometryczną można odczytać z rysunku. Na przykład

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$



Z geometrycznej interpretacji liczb zespolonych wynika natychmiast, że

$$r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_2(\cos\psi + \imath\sin\psi)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $r_1 = r_2$ oraz $\varphi = \psi + 2k\pi$ dla pewnej całkowitej liczby k. Z uwagi tej skorzystamy przy wyprowadzaniu wzoru na pierwiastki.

Wzór de Moivre'a

Przemnóżmy dwie liczby zadane w postaci trygonometrycznej:

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2] =$$
$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Tak więc przy mnożeniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty. W podobny sposób można pokazać, że przy dzieleniu dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

Mnożąc n-krotnie tę samą liczbę zespoloną otrzymamy klasyczny wzór:

Twierdzenie 2.1 (de Moivre'a)
Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Przykład 2.1 Oblicz $(1-i)^{18}$.

Rozwiązanie: Postać trygonometryczna potęgowanej liczby:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Ze wzoru de Moivre'a mamy zatem

$$(1-i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{18} = (\sqrt{2})^{18}\left(\cos\frac{18\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{18\cdot 7\pi}{4}\right) =$$
$$= 2^9\left(\cos\frac{126\pi}{4} + i\sin\frac{126\pi}{4}\right) = 512\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -512i.$$

Zadania

1. Znajdź postać trygonometryczną liczb:

a) -1; b) $2-2i$; c) $-\sqrt{3}+i$; d) $2+i\sqrt{12}$; e) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; f)* $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:

a) $(1+i)^{20}$; b) $(1-i\sqrt{3})^{10}$; c) $(-\sqrt{3}+i)^{12}$; d) $(-\sqrt{12}-2i)^{16}$.

3. Wyraź za pomocą $\arg z$: a) $\arg(\overline{z})$; b) $\arg(1/z)$.

4. Korzystając ze wzoru de Moivre'a i wzoru dwumianowego Newtona wyraź:

a) $\cos 3\alpha$ za pomocą $\cos\alpha$; b) $\sin 5\alpha$ za pomocą $\sin\alpha$.

◇ ◇ ◇

5.* Pokaż, że jednym z pierwiastków równania $8x^3-6x=1$ jest $\cos 20^\circ$. Znajdź dwa pozostałe pierwiastki.

2.2 Pierwiastki n-tego stopnia

Wzór na pierwiastki n-tego stopnia - Postać wykładnicza - Zadania*

Konsekwencją wzoru de Moivre'a jest prosty wzór na pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej. W zastosowaniach szczególną rolę odgrywają pierwiastki z jedności.

Wzór na pierwiastki n-tego stopnia

Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ będzie ustaloną liczbą zespoloną różną od zera, a $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ — jej pierwiastkiem n-tego stopnia. Wówczas

$$[|w|(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

a więc mocy wzoru de Moivre'a mamy

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tak więc

$$\begin{cases} |w|^n &= r, \\ n\psi &= \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Stąd $|w| = \sqrt[n]{r}$ oraz $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$. Zauważmy, że tylko dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ otrzymujemy różne wartości kąta ψ. Dalej wartości te cyklicznie się powtarzają. Otrzymujemy zatem n różnych pierwiastków. Odnotujmy ten wzór jako osobne twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (wzór na pierwiastki n-tego stopnia)
Liczba zespolona $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, różna od zera, ma n różnych pierwiastków n-tego stopnia $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, gdzie

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Przykład 2.2 Wyznacz pierwiastki trzeciego stopnia z 8.

Rozwiązanie: Przedstawmy 8 w postaci trygonometrycznej: $8(\cos 0 + i\sin 0)$. Na mocy powyższego wzoru otrzymujemy

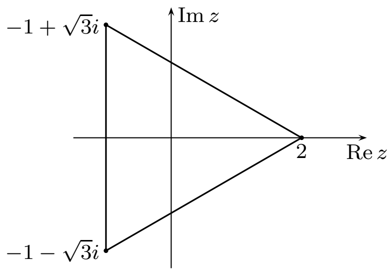
$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right).$$

Zatem $w_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$,

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Zauważ, że pierwiastki te tworzą trójkąt równoboczny.



Podobnie, pierwiastki n-tego stopnia z ustalonej liczby zespolonej tworzą n - kąt foremny o środku w punkcie $z = 0$. Dla pierwiastków z jedności jednym z wierzchołków jest punkt 1. Na tej podstawie można zaznaczyć na płaszczyźnie pozostałe pierwiastki, obracając promień wodzący skokowo o kąt $2\pi/n$.

Postać wykładnicza*

Przypomnijmy, że dla liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Załóżmy, że wzorom tym można *nadać sens* także dla liczb zespolonych. Wówczas proste rachunki pokazują, że

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \ldots = \\
&= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots = \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) \\
&= \cos x + i\sin x.
\end{aligned}$$

Zachodzi zatem równość

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Tak więc liczbę $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ można zapisać w postaci

$$z = re^{i\varphi}.$$

Takie przedstawienie liczby z nazywamy jej **postacią wykładniczą**.

Zapis ten pozwala w szczególności prościej zapisać pierwiastki n-tego stopnia z jedności. Ze wzoru na pierwiastki wynika, że $w_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, a stąd

$$w_0 = 1, \quad w_1 = e^{2i/n}, \qquad w_2 = e^{4i/n}, \ldots, \qquad w_{n-1} = e^{2(n-1)i/n}.$$

Zadania

6. Znajdź pierwiastki:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$; c) $\sqrt[3]{8i}$; d) $\sqrt[6]{-1}$; e)* $\sqrt[4]{(1+i)^8}$.

7. Korzystając z programu Wolfram Alpha® oblicz $\sqrt[5]{-1}$ za pomocą instrukcji

5th root of − 1.

♢ ♢ ♢

8. Poniższe liczby zapisz w postaci wykładniczej:

a) 2; b) -1; c) i; d) $2+i\sqrt{12}$; e)$-1+i\sqrt{3}$.

9. Jednym z wierzchołków kwadratu jest $z = 1 + 2i$, a jego środkiem symetrii $z = 0$. Znajdź pozostałe wierzchołki.

10. (z *Algebry* Bombellego, 1572) Oblicz kwadrat liczby $\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}$.

11. Wskaż równanie, którego pierwiastkami są wierzchołki sześciokąta foremnego:
a) o środku w punkcie $z = 0$, przy czym jednym z wierzchołków jest liczba i;
b) o środku w punkcie $z = 1$.

12. Wykaż, że dla $n \geqslant 2$ suma wszystkich pierwiastków stopnia n z jedynki jest równa zeru.

2.3 Pierwiastki z jedności a wielokąty foremne*

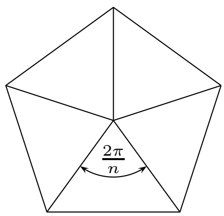
Wielokąty foremne - Konstrukcja pięciokąta foremnego - Zadania*

Starożytni Grecy umieli konstruować przy pomocy cyrkla i linijki trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, a w konsekwencji także 6-kąt, 8-kąt, 10-kąt, 12-kąt, a także — kombinując konstrukcje trójkąta równobocznego z pięciokątem — 15-kąt itd. Karol Fryderyk Gauss (1777-1855) — korzystając z liczb zespolonych — pokazał, jak skonstruować 17-kąt foremny. To odkrycie ostatecznie przesądziło, że 19-letni wówczas Gauss zajął się matematyką, a nie filologią.

Wielokąty foremne

Przypomnijmy, że **wielokąt foremny**, to wielokąt, w którym wszystkie boki i kąty są równe. Za pomocą cyrkla i linijki łatwo skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny o zadanym boku.

Gdy n-kąt foremny podzielimy na n trójkątów równoramiennych, to otrzymamy trójkąty o kącie wierzchołkowym $2\pi/n$. Problem konstrukcji n-kąta foremnego jest równoważny konstrukcji takiego kąta.



Aby zbudować taki kąt wystarczy znać jego sinus bądź cosinus. Pokażemy, że dla $n = 5$ cosinus ten (a także sinus) wyraża się za pomocą liczb wymiernych i pierwiastków *kwadratowych*. Gauss pokazał, że jest tak też dla $n = 17$, jak również dla innych liczb pierwszych postaci $n = 2^{2^k} + 1$.

Konstrukcja pięciokąta foremnego

W przypadku pięciokąta foremnego rzecz sprowadza się zatem do konstrukcji kąta $2\pi/5$ (czyli 72°). Pokazana niżej droga nie jest najprostsza, ale daje wgląd w ogólną metodę konstrukcji wielokątów foremnych.

Rozważmy liczbę $z = \cos 2\pi/5 + i \sin 2\pi/5$. Ze wzoru de Moivre'a wiemy, że liczba ta spełnia równanie $z^5 = 1$. Zauważmy ponadto, że jest to pierwiastek o minimalnym dodatnim argumencie. Przekształćmy to równanie do postaci $z^5 - 1 = 0$, a następnie do postaci

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Ponieważ szukane $z \neq 1$, więc możemy obie strony równania podzielić przez $z - 1$. Otrzymamy $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Dzieląc je przez z^2 otrzymamy symetryczną postać

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Równoważnie

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0,$$

czyli

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Wprowadźmy zmienną pomocniczą $u = z+1/z$. Otrzymamy wówczas równanie $u^2 + u - 1 = 0$, skąd

$$u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{lub} \qquad u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ponieważ z leży w I ćwiartce, więc $\mathrm{Re}(z + 1/z) > 0$, zatem $u = (-1 + \sqrt{5})/2$. Skoro $z + 1/z = u$, to $z^2 - zu + 1 = 0$, skąd

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

Zauważmy, że $u^2 - 4 < 0$, a ponadto $\mathrm{Im}(z) > 0$. Zatem

$$z = \frac{u}{2} + i\frac{\sqrt{4-u^2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}i.$$

Stąd $\cos 2\pi/5 = (-1 + \sqrt{5})/4$.

Odcinek długości $\sqrt{5}$ można łatwo skonstruować przy użyciu twierdzenia Pitagorasa. Zatem da się skonstruować także odcinek długości $\cos 2\pi/5$. Postępując podobnie Gauss pokazał, jak skonstruować $\cos 2\pi/17$.

Do tematu konstruowalności wrócimy jeszcze w ostatnim wykładzie. W szczególności zrozumiemy wówczas, dlaczego za pomocą cyrkla i linijki nie można skonstruować ani siedmiokąta, ani dziewięciokąta foremnego.

Zadania

13. Pokaż, że problem konstrukcji siedmiokąta foremnego prowadzi do równania zespolonego trzeciego stopnia.

14.* Pokaż, że problem trysekcji kąta 60° (tzn. podziału tego kąta na trzy równe kąty) sprowadza się do równania trzeciego stopnia.