Markowe Wykłady z Matematyki

Markowe Wykłady z Matematyki

analiza

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Zdjęcie na okładce
Artur Zakrzewski

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.

ISBN 978–83–62780–17–4

Wydanie I, Wrocław 2013
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że (...) są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

Panuje błędne przekonanie, iż jedynie prowadzenie badań naukowych jest rzeczą godną uznania, a przedstawianie i upowszechnianie wyników to rzecz podrzędna i uboczna. A przecież wymaga to takich samych uzdolnień i głębokiego rozumienia [przedmiotu]. W istocie, konsekwencje tego nieuzasadnionego lekceważenia podręczników są aż nadto widoczne: nasza literatura podręcznikowa pozostaje daleko poniżej poziomu publikacji naukowych, i jeśli nie sięgnęlibyśmy do przekładów z angielskiego (Anglicy nie uważają pisania podręczników za rzecz upokarzającą), to byłoby jeszcze gorzej. Należy życzyć młodzieży, aby udało się ten przesąd obalić, a przynajmniej złagodzić.

Emil Timerding 1910,
cyt. wg V. Remmert, U. Schneider, *Eine Disziplin und ihre Verleger*, transcript Verlag 2010

Spis treści

Wstęp

Odkrywanie związków pomiędzy różnorodnymi obiektami matematycznymi można porównać do odkrycia związku pomiędzy elektrycznością a magnetyzmem w fizyce, czy też — w geologii — odkryciem podobieństwa pomiędzy wschodnią linią brzegową Ameryki Południowej a zachodnią Afryki. Emocjonalne znaczenie takich odkryć w nauczaniu trudno przecenić. To one uczą nas szukać i odkrywać cudowną harmonię Wszechświata.

Władimir I. Arnold (1937-2010),
O nauczaniu matematyki, wykład wygłoszony
w Palais de Découverte w Paryżu w 1997 r.

Książka może służyć jako podstawowy podręcznik dla studentów uczelni technicznych, a także jako podręcznik uzupełniający dla studentów matematyki, zwłaszcza przyszłych nauczycieli tego przedmiotu. Wykłady 1-10, 12-15 oraz 17 odpowiadają semestralnemu kursowi analizy matematycznej. Wykłady 20-23 dają podstawowy kurs szeregów, a 26-27 krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych. Tylko w kilku rozdziałach książka wykracza poza typowy materiał.

Jednak Czytelnik szybko zauważy, że różni się ona zasadniczo od tradycyjnych podręczników. Ma nieco inny styl i nieco inne cele.

Prawdziwa matematyka dla (prawie) wszystkich

Najciekawsze książki matematyczne adresowane są do przyszłych matematyków. Mogą oni poświęcić sporo czasu na przyswajanie podstawowych pojęć czy dowodzenie twierdzeń intuicyjnie oczywistych. Moja książka szybko pokonuje te wstępne etapy, dzięki czemu szybciej możemy dojść do rzeczy *naprawdę ciekawych.*

Prawdziwy matematyk zajmuje się rozwiązywaniem konkretnych, *ciekawych problemów*. Na takich właśnie problemach skupiam się w mojej książce. Przy okazji uczymy się też metod. Rzadko jednak obliczamy *przypadkowe* pochodne czy *przypadkowe* całki. Obliczenia niemal zawsze są tu tylko narzędziem, pozwalającym uzyskać interesującą wiedzę.

Kurs ten nie ma porządku historycznego, powinien jednak dać jakieś pojęcie, jak rozwija się matematyka, i dlaczego nabiera charakteru coraz bardziej abstrakcyjnego. A przede wszystkim powinien pokazać, **co to jest matematyka**.

Historycznie rzecz biorąc istotne zastosowania analizy w fizyce zaczęły się od równań różniczkowych. Same całki i pochodne też czasem się przydają, ale rzadko pozwalają zdobyć naprawdę interesującą *wiedzę o świecie*. Dlatego zastosowania pojawiają się dopiero w ostatniej części.

Poziom ścisłości i rola dowodów

Pojęcie granicy wprowadzane jest tu intuicyjnie, bez definicji, sprawiającej zazwyczaj istotny kłopot. Także własności granic przyjęte są bez dowodu. Odpowiada to historycznemu rozwojowi rachunku różniczkowego i całkowego. Przypomnijmy, że dzisiejsza definicja granicy pochodzi w zasadzie z II połowy XIX w., a przecież praktycznie cała klasyczna analiza powstała wcześniej.

Niemal wszystkie pozostałe pojęcia są definiowane, a twierdzenia dowodzone. Tam, gdzie nie dajemy nawet zarysu dowodu, jest to zaznaczone.

Można wyróżnić dwa rodzaje dowodów. Krótkie, bardzo proste dowody służą przede wszystkim utrwaleniu i zrozumieniu definicji. Zasadniczo inny charakter mają dowody odkrywające istotne, głębokie zależności. Zrozumienie krótkiego i dość prostego dowodu twierdzenia Newtona-Leibniza daje głębsze zrozumienie całej analizy. Prześledzenie choćby w zarysie niektórych najtrudniejszych dowodów pozwoli z kolei zrozumieć, jak to się dzieje, że dwie zupełnie różne stałe e oraz π współgrają ze sobą w przedziwny sposób.

Czytelnik, aby wynieść rzeczywisty pożytek z lektury tych wykładów, powinien śledzić większą część tych rozumowań (nawet jeśli sam nie będzie w stanie ich odtworzyć), a także rozwiązywać przynajmniej część zadań, zwłaszcza podstawowych.

Wykłady oznaczone gwiazdką są trudniejsze (i ciekawsze). Zawarty w nich materiał nie ma wpływu na rozumienie zasadniczego tekstu książki, więc przy pierwszej lekturze można je śmiało pominąć. Zadania podstawowe — w większości niezbędne dla bezpiecznego posuwania się w głąb materiału — oddziela od zadań uzupełniających potrójny symbol karo.

Rachunki w dobie komputera

Zadania rachunkowe ilustrują wprowadzane pojęcia, techniki czy twierdzenia. Większość jest stosunkowo prosta. Można założyć, że w praktyce potrzebne rachunki będzie wykonywał odpowiedni program. Ale Czytelnik szybko się przekona, że pewna elementarna biegłość rachunkowa jest niezbędna, aby śledzić ze zrozumieniem tok wykładu.

Czytelnik może bez trudu sprawdzić poprawność odpowiedzi do zadań rachunkowych za pomocą odpowiednich programów, np. rekomendowanego przez nas Wolfram Alpha®. Mimo to, do większości zadań podane są wskazówki bądź odpowiedzi na końcu książki.

Po co komu matematyka?

Większość obliczeń wykonuje dziś komputer. Jeśli zatem matematyka zachowuje znaczącą pozycję w kształceniu inżynierów, to muszą być po temu jakieś inne powody. Wymieńmy trzy.

Podstawowe prawa fizyki i innych nauk przyrodniczych wyrażane są w języku matematyki. Zrozumienie praw Maxwella czy podstaw mechaniki kwantowej wymaga dość zaawansowanej matematyki. Co więcej, nawet pełne zrozumienie odpowiedzi, jakie dają nowoczesne programy, bywa niełatwe.

Matematyka pozostaje wciąż najskuteczniejszą szkołą ścisłego myślenia. Uczy precyzyjnego i jasnego formułowania myśli, przyzwyczaja do myślowego porządku.

Wreszcie, matematyka uchodzi za dyscyplinę wyjątkowo trudną, konkurując w tym względzie jedynie z fizyką. Bardzo możliwe, że właśnie to decyduje o jej walorach edukacyjnych. Po solidnym kursie matematyki wszystko inne wydaje się prostsze.

Matematyka: część naszej kultury

Średnio wykształcony człowiek słyszał coś o teorii względności i Einsteinie, o DNA, o ewolucji i Darwinie, czy o tablicy Mendelejewa. Ale jego wiedza matematyczna kończy się na geometrii analitycznej bądź początkach analizy, czyli na XVII w. Absolwent szkoły średniej może sobie wyobrazić, czym zajmuje się fizyk, biolog czy historyk. Ale nawet absolwent wyższej uczelni nie bardzo wie, co właściwie robi matematyk.

Starałem się pokazać, jak konkretne proste problemy prowadzą do abstrakcyjnych pojęć i (czasem) skomplikowanych rachunków. Pokazać, jak w miarę rozwoju narzędzi matematycznych zmienia się nasze widzenie wyjściowych problemów, jak przesuwają się akcenty.

Analiza matematyczna w zakresie przedstawionym w tej książce powstała zasadniczo w XVII-XVIII w., tylko sam język pochodzi z wieku XIX. Tworzona była przez ludzi, którzy zajmowali się nie tylko matematyką, ale też fizyką, astronomią czy techniką. Można zatem zakładać, że to co tworzyli jest interesujące nie tylko dla przyszłych matematyków, ale też przyszłych fizyków i inżynierów. W szczególności, że potrafią oni podzielać emocje matematyków, dostrzegać urodę twierdzeń czy pomysłowość rachunków.

Współczesna matematyka również czerpie inspiracje z prostych pytań, ale droga od tych pytań do abstrakcyjnych problemów matematyki współczesnej jest wyraźnie dłuższa. W stosunku do matematyki tu przedstawionej dłuższa o 200 lat. Do współczesności zbliżymy się chwilami w następnych tomach kursu.

♢ ♢ ♢

Przez ostatnie trzydzieści lat sposób pisania o matematyce zmienił się zasadniczo. Pojawiło się wiele interesujących książek, rzadko tłumaczonych na język polski. Korzystając z nich starałem się zaznaczać wyraźnie wszelkie zapożyczenia. Ale oprócz bezpośrednich zapożyczeń moje wykłady zawdzięczają wiele tak wybitnym książkom, jak *Approximately calculus* Shahriara Shahriariego, *Gamma* Juliana Havila, *Excursions in calculus* Roberta M. Younga czy książkom George'a F. Simmonsa. Moja książka jest inna, ale dzięki tym wspaniałym Autorom wiedziałem dokąd zmierzać.

Do tych, nieco abstrakcyjnych, wyrazów wdzięczności chciałbym dodać konkretne. Moja żona Danusia (nauczycielka liceum z wieloletnim doświadczeniem) zaproponowała szereg zmian ułatwiających lekturę typowemu absolwentomi szkoły średniej. Moi koledzy — Marian Gewert i Zbigniew Skoczylas — włożyli sporo wysiłku, by usunąć subtelne potknięcia merytoryczne, wygładzić tekst, i zadbać o wygląd książki. Gorąco dziękuję za wszystkie uwagi i sugestie, dzięki którym książka na pewno wiele zyskała.

I

Analiza z lotu ptaka: granica, pochodna i całka

Teoria, która nie rozwiązuje żadnego konkretnego problemu jest bezwartościowa. I na odwrót, każdy głęboki problem napędza rozwój teorii potrzebnej do jego rozwiązania.

Michael Atiyah (ur. 1929),
The Princeton Companion to Mathematics
Princeton University Press 2008

Może najważniejszą cechą dobrego problemu jest jego ogólność. Rozwiązanie takiego problemu ma rozgałęzienia wykraczające daleko poza wyjściowe pytanie.

Timothy Gowers (ur. 1963), tamże

Motorem rozwoju nauki są problemy. Zaczniemy od pytania, jak znaleźć wzór na sumę

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k.$$

Szybko okaże się, że pytania o **przybliżony** wzór są ważniejsze; niemal natychmiast prowadzą one do pojęcia **granicy ciągu**. Są one także ściśle związane z pojęciem **całki oznaczonej**.

Wcześniej jednak wprowadzimy dwa inne pojęcia: **funkcji ciągłej** oraz **pochodnej**. Pod koniec tej części poznamy zasadnicze twierdzenie **Newtona-Leibniza** pokazujące związek pomiędzy tymi dwoma pojęciami.

Dla wykładnika $k = -1$ suma potęg przyjmuje postać

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza pokażemy, że powyższą sumę można przybliżyć za pomocą logarytmu naturalnego.

Tak więc te pięć początkowych wykładów to krótkie wprowadzenie w podstawowe pojęcia i metody analizy. Niemal wszystko, o czym będzie mowa powstało wyraźnie przed końcem XVII w. Bardziej współczesny jest tylko język.

Wykład 1

Prolog

Gdy siedmioletni Gauss miał obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 100, szybko odkrył, jak uniknąć rachunków. Powtórzmy jego rozumowanie. Wyobraźmy sobie te liczby wypisane raz w porządku rosnącym, a raz w porządku malejącym:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Suma liczb w każdej z kolumn jest równa 101. Kolumn jest 100, a więc dwukrotność szukanej sumy to $100 \cdot 101$. Zatem suma to $(100 \cdot 101)/2 = 50 \cdot 101 = 5050$. W podobny sposób można pokazać, że

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pomysł ten znany był już w VIII w. uczonym z otoczenia Karola Wielkiego.

1.1 Odkrywanie wzorów, sumowanie potęg i zasada indukcji

Odkrywanie wzorów - Zasada indukcji matematycznej - Sumowanie kwadratów - Sumy innych potęg - Średnie - Sumowanie kwadratów i objętość kuli - Zadania

Odkrywanie wzorów

Załóżmy, że nie mamy żadnego pomysłu, jak wygląda wzór na sumę początkowych liczb naturalnych $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Naturalne podejście to obserwacja konkretnych przypadków.

Mamy kolejno 1, 3=1+2, 6=1+2+3 i dalej, jak niżej:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & ? \end{array}$$

Prawdopodobnie nie uda nam się odgadnąć tu żadnego ogólnego wzoru. W takiej sytuacji możemy nasz problem zmodyfikować. Zbadajmy podwojenie szukanej sumy:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & ? \end{array}$$

Teraz mamy już spore szanse na odkrycie wzoru:

$$2 = 1 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 12 = 3 \cdot 4, \quad 20 = 4 \cdot 5, \quad 30 = 5 \cdot 6, \quad 42 = 6 \cdot 7, \ \ldots$$

Możemy *przypuszczać*, że podwojona suma S_n jest równa $n(n+1)$, a więc $S_n = [n(n+1)]/2$. Niestety, takie eksperymentalne podejście nie daje żadnej pewności, że hipoteza jest prawdziwa.

Wraz z rozwojem metod informatycznych coraz więcej ważnych odkryć uzyskiwanych jest eksperymentalnie za pomocą komputera. Ale dowód znajdujemy niemal zawsze metodami tradycyjnymi.

A oto kilka dalszych podobnych pytań:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1{+}3 & = & 4 \\ 1{+}3{+}5 & = & 9 \\ 1 + 3 + ... + (2n-1) & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1^3 & = & 1 \\ 1^3 + 2^3 & = & 9 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 & = & 36 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot 1! & = & 1 \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! & = & 5 \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! & = & 23 \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! & = & 119 \\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! & = & ? \end{array}$$

Zasada indukcji matematycznej

Rozważmy jakąkolwiek tożsamość $T(n)$ dotyczącą dodatnich liczb naturalnych 1, 2, 3, ... Aby przekonać się o jej prawdziwości, możemy zacząć od sprawdzenia, czy zachodzi ona dla początkowych liczb naturalnych:

$$T(1), \quad T(2), \quad T(3), \quad T(4), \quad T(5), \quad ...$$

W naukach przyrodniczych rozumowanie oparte na analizie części przypadków nazywa się *indukcją*. Czasem dla podkreślenia faktu, że nie obejmuje ona wszystkich przypadków nazywamy ją *indukcją niezupełną*. W matematyce kolejne sprawdzanie przypadków może wzmacniać naszą wiarę w prawdziwość twierdzenia, ale nie zastąpi dowodu.

Wyobraźmy sobie, że o tożsamości $T(n)$ umiemy pokazać coś więcej. Potrafimy wykazać, że prawdziwa jest tożsamość $T(1)$, a także wszystkie poniższe wynikania:

$$\begin{array}{ccc}
T(1) & \Longrightarrow & T(2) \\
T(2) & \Longrightarrow & T(3) \\
T(3) & \Longrightarrow & T(4) \\
T(4) & \Longrightarrow & T(5) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Skoro zachodzi $T(1)$ oraz wynikanie $T(1) \Longrightarrow T(2)$, to zachodzi też $T(2)$. Na mocy kolejnego wiersza zachodzi wówczas także $T(3)$ itd. W takim przypadku wykazalibyśmy oczywiście prawdziwość $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych, ale dowód taki trwałby nieskończenie długo.

Na szczęście w wielu przypadkach wszystkie dalsze wynikania można uzasadnić, postępując według tego samego schematu. A wówczas, zamiast nieskończenie wielu wynikań, wystarczy sprawdzić, że $T(1)$ oraz że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi wynikanie $T(k) \Longrightarrow T(k+1)$. Rozumowanie takie stanowi już kompletny dowód, a dotyczyć może nie tylko tożsamości, ale też innych własności liczb naturalnych. Punktem wyjściowym nie musi być liczba 1.

Twierdzenie 1.1 (zasada indukcji matematycznej)
Niech $T(n)$ będzie pewną własnością liczb naturalnych. Załóżmy, że:
1. dla pewnej liczby naturalnej n_0 zachodzi $T(n_0)$;
2. dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant n_0$ zachodzi wynikanie

$$T(k) \Longrightarrow T(k+1).$$

Wówczas własność $T(n)$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.

Zasada indukcji matematycznej nazywana była niegdyś zasadą *indukcji zupełnej*, gdyż w istocie sprawdza wszystkie przypadki.

Przykład 1.1 Za pomocą metody indukcji matematycznej wykaż tożsamość

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozwiązanie:
1. Krok początkowy: Dla $n = 1$ tożsamość zachodzi, gdyż

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

2. Załóżmy, że tożsamość zachodzi dla **dowolnej ustalonej** liczby naturalnej k, tzn.

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Wykażemy, że zachodzi też dla $k + 1$, tzn.

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Rzeczywiście,

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = [1 + 2 + ... + k] + (k+1) \overset{ind}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ = \frac{k\,(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Równość, oznaczona znakiem *ind*, pokazuje przejście, w którym skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego.

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że tożsamość prawdziwa jest dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych.

Dowody indukcyjne mogą wyglądać rozmaicie, ale ich zasadniczy schemat jest niemal zawsze taki sam. Zwróćmy jeszcze uwagę na wyróżnione słowa *dowolnej ustalonej*. Kto zastąpi te słowa słowami *dla wszystkich* zdradza, że nie rozumie metody. Zastanów się, dlaczego.

Zauważmy jeszcze, że indukcja matematyczna jest metodą *dowodzenia*. Jednak w żadnym stopniu nie podpowiada, jak odkryć dowodzone twierdzenie.

Sumowanie kwadratów

Spróbujmy teraz wyprowadzić wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \ldots$$

Znów zacznijmy od analizy konkretnych przypadków. Spójrzmy na początkowe sumy:

$$1^2 + 2^2 = 5, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30, ...$$

Chyba trudno odgadnąć tu jakąś prawidłowość.

Ponieważ znamy już wzór na sumę początkowych liczb naturalnych, więc spróbujmy porównać sumę kwadratów $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ z sumą $1 + 2 + \ldots + n$. Oto odpowiednie ilorazy:

$$\frac{1^2 + 2^2}{1+2} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1+2+3} = \frac{7}{3}, \qquad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{1+2+3+4} = \frac{9}{3}, \ldots$$

Ostatni iloraz jest oczywiście równy 3, ale zapis w postaci ułamka pozwala łatwiej dostrzec ogólną prawidłowość:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2n+1}{3}.$$

A stąd

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Osobną sprawą jest dowód tego wzoru. Tradycyjny dowód otrzymujemy za pomocą indukcji matematycznej. Inny podpowiadamy w zadaniu 21.

Sumy innych potęg

Wzór na sumę sześcianów odgadnąć jest bardzo łatwo:

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2, \ \ldots$$

Gdy zauważymy, że $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, to bez trudu sformułujemy hipotezę

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Równość tę łatwo udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Ogólny problem znalezienia wzoru na sumę

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

dla naturalnych wykładników k rozwiązał Jakub Bernoulli. Wzór ten (bez dowodu) przytaczamy w zadaniu 25.12.

Spójrzmy jeszcze na przypadek wykładników całkowitych ujemnych. Problem ma tu zupełnie inny charakter. Dla wykładnika $k = -1$ otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Sumę tę nazywamy **n-tą liczbą harmoniczną** (bądź **sumą harmoniczną**) i oznaczamy symbolem H_n. Dokładnego wzoru dla liczby H_n nie znamy. Ale szacowaniem sum takich jak powyższa, czy analogiczna dla odwrotności kwadratów, zajmiemy się w dalszych częściach książki.

Średnie

Powszechnie znana jest **średnia arytmetyczna** liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ określana wzorem

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Dla liczb *dodatnich* określamy **średnią geometryczną**

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,,$$

a także **średnią harmoniczną**

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Wszystkie te średnie znane były już starożytnym Grekom.

Twierdzenie 1.2 (nierówność o średnich)
Pomiędzy średnią arytmetyczną A dowolnych liczb dodatnich, ich średnią geometryczną G oraz ich średnią harmoniczną H zachodzi podwójna nierówność

$$A \geqslant G \geqslant H.$$

Obie nierówności stają się równościami tylko w przypadku jednakowych liczb.

Wskazówkę, jak udowodnić tę nietrywialną nierówność dajemy w zadaniu 14.

Spójrzmy na te średnie dla liczb $1, 2, \ldots, n$:

$$A = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2};$$

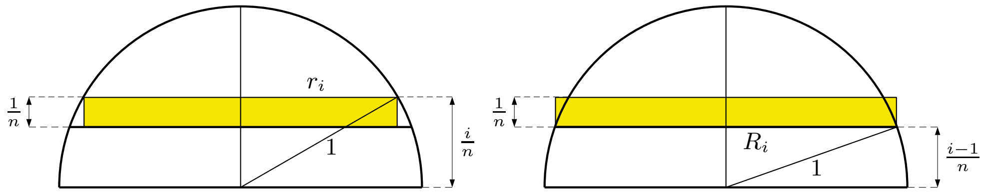
$$G = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \sqrt[n]{n!};$$

$$H = \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

W mianowniku średniej harmonicznej pojawia się wspomniana już wcześniej n-ta liczba harmoniczna. Gdy poznamy oszacowanie H_n, otrzymamy też pośrednio oszacowanie powyższej średniej harmonicznej. W dalszych wykładach pojawi się też oszacowanie średniej geometrycznej.

Sumowanie kwadratów i objętość kuli

Pokażemy teraz, jak wykorzystać wzór na sumę kwadratów do wyprowadzenia wzoru na objętość kuli. Zacznijmy od wyprowadzenia wzoru na objętość półkuli o promieniu 1.



Podzielmy półkulę na n plastrów o jednakowej wysokości. Objętość każdego z plastrów można oszacować porównując ją z objętością walca wpisanego w plaster i objętością walca na nim opisanego.

Każdy z walców ma wysokość $1/n$. Promienie walca wpisanego w i-ty plaster oraz walca na nim opisanego to odpowiednio

$$r_i = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad R_i = \sqrt{1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2}.$$

Ze wzoru na objętość walca wynika zatem, że objętość i-tego plastra opisanego jest równa

$$V_i = \pi \left[1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{n}.$$

Stąd otrzymujemy górne oszacowanie na objętość półkuli V:

$$V < \pi \left\{ \left[1 - \left(\frac{0}{n} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] + \ldots + \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right] \right\} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \pi \left[1 - \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \right] = \pi \left[1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right].$$

Podobnie możemy otrzymać oszacowanie dolne na V, porównując objętości plastrów z objętościami walców *wpisanych*.

Po prostych przekształceniach otrzymamy podwójną nierówność

$$\pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right) < V < \pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} \right).$$

Pozostaje zauważyć, że gdy podział na plastry jest odpowiednio drobny (tzn. n dostatecznie duże) ułamki $1/n$ oraz $1/2n$ przyjmują wartości dowolnie bliskie zeru. Zatem obydwa wyrażenia ograniczające V zbliżają się dowolnie blisko do $2\pi/3$. Taka jest zatem objętość rozważanej półkuli. Stąd objętość kuli jednostkowej to $4\pi/3$.

Każde dwie kule są podobne. Skalą podobieństwa kuli o promieniu R do kuli jednostkowej jest stosunek ich promieni, czyli R. Stosunek ich objętości to R^3, skąd znany wzór na objętość kuli $V = 4\pi R^3/3$.

Zadania

1. Korzystając z metody indukcji matematycznej wykaż tożsamości:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

2. Wyprowadź wzór na sumę kwadratów n początkowych liczb parzystych oraz sumę kwadratów n początkowych liczb nieparzystych.

3. Odgadnij wzór na sumę i wykaż jego prawdziwość

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

4. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego $n > 1$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

5. Wykaż, że dla $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność

$$2^n > n^2.$$

6. Korzystając z programu Wolfram Alpha® znajdź wzór na sumę piątych potęg za pomocą instrukcji

$$\mathrm{sum}(1^5 + \ldots + n^5)$$

W podobny sposób:
a) Oblicz sumę $1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4$.
b) Znajdź wzór na sumę sześcianów n początkowych nieparzystych liczb naturalnych.

7. Sprawdź, ze średnia geometryczna dwu liczb dodatnich jest średnią geometryczną ich średniej arytmetycznej i harmonicznej.

8. Pitagorejczykom zawdzięczamy spostrzeżenie, że w sześcianie liczba wierzchołków jest średnią liczby ścian i liczby krawędzi. O jakiej średniej tu mowa?

9. Sprawdź, że w ciągu $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ każdy wyraz jest średnią harmoniczną dwu sąsiednich.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

10. Sprawdź, że zachodzi tożsamość

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3.$$

Wyprowadź stąd wzór na sumę sześcianów liczb naturalnych od 1 do n.

11. Odgadnij wzór na sumę

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n+1} n$$

i wykaż jego prawdziwość.

12. Wykaż nierówność o średnich dla $n = 2$.

13. Sprawdź, że zachodzi tożsamość

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} \cdot \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right].$$

Wywnioskuj stąd, że $(a^3 + b^3 + c^3)/3 \geqslant abc$, a następnie wyprowadź nierówność o średnich dla $n = 3$.

14.* Wykaż, że średnia arytmetyczna n dodatnich liczb jest większa bądź równa ich średniej geometrycznej. Wywnioskuj stąd, że średnia geometryczna n liczb dodatnich jest większa bądź równa ich średniej harmonicznej.
Wsk.: Niech $T(n)$ oznacza nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla n liczb. Z zadania 12 wiemy, że zachodzi $T(2)$. Wykaż, że

$$T(n) \Longrightarrow T(2n) \quad \text{oraz} \quad T(n) \Longrightarrow T(n-1).$$

Wyjaśnij, dlaczego wynika stąd prawdziwość nierówności o średnich dla dowolnego naturalnego n.

1.2 Dwumian Newtona

Trójkąt Pascala - Współczynniki Newtona - Wzór dwumianowy Newtona i Σ-notacja - O jeden krok za daleko? - Dwa motywy - Zadania

Przypomnijmy wzory na kwadrat i sześcian sumy:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2;\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Bez trudu można wyprowadzić wzór na czwartą potęgę:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Można *przypuszczać*, że ogólny wzór będzie miał postać:

$$(a+b)^n = a^n + ?a^{n-1}b + \ldots + ?a^kb^{n-k} + \ldots + ?ab^{n-1} + b^n.$$

Znacznie trudniej odgadnąć współczynniki przy kolejnych składnikach.

Trójkąt Pascala

Wzór dwumianowy Newtona znany był w istocie już w XI w. lub niewiele później w Chinach, Indiach i krajach Islamu. Znany był w postaci zwanej dziś **trójkątem Pascala**.

$$\begin{array}{c} 1\\ 1\quad 1\\ 1\quad 2\quad 1\\ 1\quad 3\quad 3\quad 1\\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\ 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\ 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Wiersze tego trójkąta pokazują kolejne współczynniki wzoru $(a+b)^n$ odpowiednio dla $n=0$, $n=1$ itd. Zauważ, że współczynniki $(a+b)^n$ tworzą wiersz o numerze $(n+1)$. Na przykład z *szóstego* wiersza można odczytać, że

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

W trójkącie Pascala wyrazy skrajne są równe 1, pozostałe powstają przez dodanie dwu wyrazów sąsiednich z poprzedniego wiersza. To Pascal (1623-1662) wykazał, że współczynniki we wzorze dwumianowym spełniają taką zależność, więc nazwa trójkąta jest przynajmniej częściowo uzasadniona.

Współczynniki Newtona

Trójkąt Pascala nie daje jawnych wzorów na współczynnniki n-tego wiersza. Aby zapisać ogólny wzór na $(a+b)^n$ musimy wprowadzić oznaczenia na występujące w trójkącie współczynniki, zwane **współczynnikami Newtona**. Współczynniki te mają naturalny sens na gruncie kombinatoryki (p. kolejny tom tego kursu). Tam też łatwiej podać naturalny dowód wzoru Newtona. Tu współczynniki newtonowskie wprowadzimy formalnie, a dowód wzoru dwumianowego Newtona pozostawimy jako zadanie (p. zad.19).

Dla liczb naturalnych $0 \leqslant k \leqslant n$ współczynniki Newtona definiujemy wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. Przyjmujemy ponadto umowę, że $0! = 1$.

Wzór dwumianowy Newtona i Σ-notacja

Wzór Newtona zapiszemy na dwa sposoby: najpierw nieformalnie, potem formalnie.

Twierdzenie 1.3 (wzór dwumianowy Newtona)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Ten nieformalny zapis (świadectwem nieformalności są kropki ...) można zastąpić zapisem bardziej formalnym i krótszym, stosując tzw. Σ-notację. Służy ona do zapisywania sum. Na przykład

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2, \qquad \sum_{k=3}^{n} k = 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$$

Dolny indeks wskazuje, od którego wyrazu zaczynamy sumować, górny — na którym kończymy. Po znaku Σ dajemy ogólną postać składników.

W Σ-notacji wzór dwumianowy przyjmuje postać:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Podstawmy w tym wzorze $a = 1$ oraz $b = x$. Otrzymamy wówczas

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

W szczególności dla $x = 1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tak więc suma współczynników we wzorze Newtona jest równa 2^n.

O jeden krok za daleko?

Wzór dwumianowy dla naturalnych wykładników n znany był na długo przed Newtonem. Newton chyba jako pierwszy zastosował ten wzór dla wykładników innych niż naturalne. Rozważmy szczególny przypadek wzoru dwumianowego — wzór na $(1+x)^n$ i zastosujmy go dla $n = 1/2$. Przypomnijmy, że $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$. Otrzymujemy zatem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \ldots$$

Na razie nie wiadomo, jak rozumieć ułamkowe współczynniki newtonowskie. Przypomnijmy, że dla naturalnych n mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Wydaje się zatem rozsądnym przyjąć

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}, \ldots$$

Uwzględniając kilka dalszych współczynników otrzymujemy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \ldots$$

Tu pojawia się nowa trudność. Wszystkie kolejne współczynniki są różne od zera, a więc suma po prawej stronie składa się z nieskończenie wielu składników. W przyszłości przyjrzymy się takim sumom bliżej. Na razie przyjmijmy, że ograniczając się tylko do skończenie wielu składników otrzymujemy pewne przybliżenia. Na przykład

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \text{albo} \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

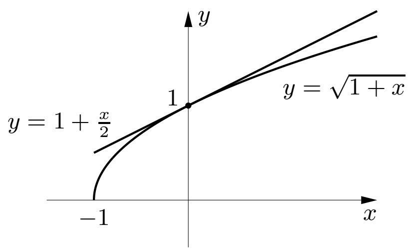
Te przybliżenia są dość dobre, gdy x jest bliskie zera.

Ale dla $x = 1$ nawet drugie z tych przybliżeń daje tylko $\sqrt{2} \approx 1,375$. Aby otrzymać dość słabe przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,41$ trzeba wziąć kilkanaście składników. Nasz przybliżony wzór wyraźnie nie nadaje się do obliczania $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, gdyż 1 jest za daleko od zera.

Pierwsze z tych przybliżeń ma prostą interpretację geometryczną. W przyszłości przekonamy się, że prosta

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

jest styczną do wykresu $y = \sqrt{1+x}$ w punkcie $P = (0, 1)$.



Dwa motywy

W poprzednim podrozdziale rozważaliśmy problemy sumowania potęg i szacowania takich sum. Wiążą się one z obliczaniem objętości (co już widzieliśmy), a także pól i długości. Tematyka ta jest punktem wyjścia dla pojęcia **całki**.

Tutaj z kolei zetknęliśmy się z problemem aproksymacji funkcji za pomocą funkcji prostszych, np. liniowych. Zauważyliśmy też, że problem ten wiąże się z pojęciem stycznej. Aproksymacje funkcji i pojęcie stycznej są ściśle związane z **pochodną**.

W wykładach 4 oraz 5 zdefiniujemy te dwa centralne pojęcia analizy i pokażemy ich pierwsze zastosowania. Najpierw jednak musimy wprowadzić pojęcie granicy.

Zadania

15. Zapisz bez użycia Σ-notacji:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$; b) $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$; c) $\sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{1}{i-1}$.

16. Zapisz przy użyciu Σ-notacji:
a) wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n;
b) wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych.

17. Zapisz korzystając ze wzoru Newtona:

a) $(a+1)^4$; b) $(2b-a)^5$; c) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$.

18. Korzystając z programu Wolfram Alpha® znajdź rozwinięcie newtonowskie dla $(a+b)^4$ za pomocą instrukcji

$$\text{expand}(a+b)^4$$

W podobny sposób znajdź rozwinięcie dla $(x+y+z)^3$.

♢ ♢ ♢

19. Udowodnij tożsamość Pascala

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Korzystając z tej tożsamości i zasady indukcji matematycznej wykaż wzór Newtona dla wykładników naturalnych.

20. Korzystając ze wzoru na $(1+x)^n$ wykaż, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

Wywnioskuj stąd, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}.$$

21.* Wykaż tożsamość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

i wywnioskuj z niej wzór na sumę kwadratów. Wyprowadź w podobny sposób wzór na sumę sześcianów.

Wykład 2

Granica ciągu

Przypomnijmy trzy poznane wzory na sumy potęg:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}, \\
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Wzory dla dalszych potęg stają się coraz bardziej skomplikowane. Często bardziej przydatny okazuje się prostszy wzór przybliżony:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + n &\approx \frac{n^2}{2}, \\
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &\approx \frac{n^3}{3}, \\
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 &\approx \frac{n^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Nietrudno odgadnąć, że w ogólnym przypadku otrzymamy

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Zauważmy, że przybliżony wzór jest tu bardziej czytelny, a także łatwiejszy do odkrycia.

Przybliżone wzory dla funkcji, sum itp. nazywamy **aproksymacjami**. Ostatnia aproksymacja podsuwa dalsze uogólnienia: spróbuj w miejsce k podstawić

$1/2$, $-1/2$ czy -2. Tak śmiałe uogólnienia nie zawsze prowadzą do poprawnych wzorów, ale ryzykowne eksploracje mają sens także w matematyce. Na razie jednak spróbujmy nadać ścisły sens symbolowi $\approx$ w powyższych wzorach.

2.1 Intuicje i rachunki

Pojęcie granicy i najprostsze przykłady - Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne - Twierdzenie o trzech ciągach i zbieżność pierwiastków - Rzędy wielkości i asymptotyczna równość - Zadania

Formalna definicja granicy ciągu pojawiła się przynajmniej 2000 lat później niż samo pojęcie. Nie słyszeli o niej ani Archimedes, ani Newton czy Euler. Można więc założyć, że podstawowy kurs analizy też sobie poradzi operując wyłącznie określeniem intuicyjnym.

Pojęcie granicy i najprostsze przykłady

Pokażemy, jak powstała pierwsza z rozważanych aproksymacji. Rozważmy iloraz sumy $1 + 2 + \ldots + n$ przez n^2:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Gdy n przybiera coraz większe wartości naturalne: $n = 1$, $n = 10$, $n = 1000$ itd. wyrażenie $1/2n$ zbliża się dowolnie blisko do 0, a więc rozważany iloraz staje się dowolnie bliski $1/2$. Mówimy, że iloraz ten zbiega do $1/2$ i zapisujemy to symbolicznie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Zatem dla dużych n rozważany iloraz jest bliski $1/2$, skąd

$$1 + 2 + \ldots + n \approx \frac{n^2}{2}.$$

Podobnie otrzymujemy dwie pozostałe aproksymacje.

W powyższym rozumowaniu pojawiła się granica ciągu. Jeżeli wraz ze wzrostem n (gdy n dąży do nieskończoności) wyrazy ciągu a_n stają się dowolnie bliskie pewnej skończonej liczby g, to mówimy, że ciąg a_n **ma granicę** g, albo że **jest zbieżny do** g. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \qquad \text{albo krócej} \qquad a_n \to g.$$

Gdy mówimy o zbieżności ciągów, to zawsze zakładamy, że n *dąży do nieskończoności*, nawet gdy nie jest to zaznaczone.

W obliczeniach korzystać będziemy z podstawowych intuicji. Jest dość oczywiste, że takie ciągi jak

$$a_n = \frac{2}{n}, \qquad b_n = \frac{5}{n+2}, \qquad c_n = \frac{1}{n^2},$$

przy n dążącym do nieskończoności, dążą do zera. Okazuje się, że wychodząc od tych prostych granic, możemy obliczać granice ciągów bardziej skomplikowanych. Obliczmy dla przykładu granicę ciągu $a_n = (2+n)/3n$:

$$a_n = \frac{2+n}{3n} = \frac{2}{3n} + \frac{n}{3n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \to \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Korzystaliśmy tu z intuicyjnej własności granicy ciągów: granicą sumy dwu ciągów jest suma ich granic. Analogiczne własności zachodzą też dla granic różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów.

Twierdzenie 2.1 (arytmetyka granic skończonych)
Załóżmy, że ciągi a_n oraz b_n mają granice a, b. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Jeżeli ponadto $b \neq 0$, to także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Spójrzmy dokładniej na przykładowe zastosowania tego twierdzenia.

Przykład 2.1 Oblicz granicę ciągu:

$$\text{a)}\ \ a_n = \frac{3n+1}{2n+5}; \qquad \text{b)}\ \ b_n = \frac{2n^2 - 6n}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie: Przekształcimy wzór ciągu w ten sposób, że wartość wyrażenia nie zmieni się, ale z przekształconej postaci łatwiej będzie wyznaczyć granicę.

a) Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

b) Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 6n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{6}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne

Przyjrzyjmy się ciągom geometrycznym $a_n = (1/2)^n$ oraz $b_n = (-2/3)^n$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \qquad\qquad -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{64}, -\frac{32}{243}, \ldots$$

Intuicyjnie jest jasne, że obydwa dążą do zera. Te intuicje są trafne. Odnotujmy zatem to spostrzeżenie jako osobne twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.2 *Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny q^n jest zbieżny do zera.*

Nie każdy ciąg ma granicę. Na przykład ciąg $a_n = (-1)^n$ ma wyrazy na przemian -1 oraz 1, więc nie ma żadnej liczby, do której te wyrazy by się zbliżały. Podobnie jest z ciągiem $a_n = (-2)^n$, który oscyluje pomiędzy coraz większymi liczbami dodatnimi i coraz większymi (co do wartości bezwzględnej) liczbami ujemnymi. Ciągi, które nie mają skończonej granicy nazywamy **rozbieżnymi**.

Pośród ciągów rozbieżnych na osobną uwagę zasługują dwa szczególne typy. Ciągi takie, jak np. $a_n = n^2$ czy $b_n = 2^n$ dążą do plus nieskończoności. Symbolicznie zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Z kolei ciągi takie, jak $a_n = -n$ czy $b_n = -2^n$ dążą do minus nieskończoności. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty.$$

Takie nieskończone granice nazywamy **niewłaściwymi**, a o samych ciągach mówimy, że są **rozbieżne** do plus albo minus nieskończoności.

W wielu obliczeniach wykorzystujemy ważną własność ciągów rozbieżnych do plus bądź minus nieskończoności.

TWIERDZENIE 2.3 *Jeżeli ciąg $|a_n|$ jest rozbieżny do nieskończoności, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Rzeczywiście, jeżeli wartości $|a_n|$ wraz ze wzrostem n przyjmują dowolnie duże wartości dodatnie, to ich odwrotności $1/|a_n|$ stają się dowolnie bliskie zera. A wówczas także ciąg $1/a_n$ dąży do zera.

PRZYKŁAD 2.2 Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Rozwiązanie: Zastosowanie twierdzenia o granicy różnicy ciągów nie jest tu możliwe, gdyż ani ciąg $\sqrt{n^2+n}$, ani ciąg n nie mają granicy skończonej. Aby wyznaczyć granicę tego ciągu, przekształćmy go korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

W mianowniku możemy wyciągnąć n przed nawias:

$$\sqrt{n^2+n}+n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right).$$

Zatem

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że z pozoru oczywiste podejście

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \infty - \infty,$$

dałoby **błędny** wynik zero. Na ogół nie można stosować twierdzeń o arytmetyce granic dla granic nieskończonych. Są jednak wyjątki. Dwa najważniejsze to:

$$\infty + \infty = \infty, \qquad \infty \cdot \infty = \infty.$$

Formalnie: suma oraz iloczyn ciągów rozbieżnych do ∞ też jest ciągiem rozbieżnym do ∞.

Twierdzenie o trzech ciągach i zbieżność pierwiastków

Następujące oczywiste twierdzenie bywa bardzo użyteczne:

Twierdzenie 2.4 (o trzech ciągach)
Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

to ta wspólna granica jest też granicą ciągu b_n.

Za pomocą kalkulatora łatwo znaleźć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{2}$. Obliczając wartości pierwiastka np. dla $n = 100$, $n = 1\,000$ bez trudu odgadniemy, że granicą tą będzie 1. Pokażemy teraz, jak to przypuszczenie udowodnić.

Niech $\sqrt[n]{2} = 1 + r_n$. Wówczas $r_n > 0$. Pozostaje wykazać, że $r_n \to 0$. Przypomnijmy początek wzoru Newtona dla $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots$$

Zatem

$$2 = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = (1+r_n)^n = 1 + nr_n + \dots > 1 + nr_n,$$

gdyż dla dodatniego r_n wszystkie dalsze wyrazy też są dodatnie. Tak więc $1 > nr_n$, skąd

$$0 < r_n < \frac{1}{n}.$$

Ponieważ skrajne ciągi dążą do zera, więc także r_n dąży do zera, a stąd

$$\sqrt[n]{2} = 1 + r_n \to 1 + 0 = 1.$$

W podobny sposób można udowodnić, że zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.5 *Dla dowolnego dodatniego a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Rzędy wielkości i asymptotyczna równość

Teraz możemy już nadać ścisły sens przybliżonym wzorom, od których zaczęliśmy wykład.

Niech f oraz g będą funkcjami określonymi na zbiorze liczb naturalnych, o wartościach dodatnich. Mówimy, że funkcja $f(n)$ **jest rzędu** $g(n)$, jeśli granica $f(n)/g(n)$ jest liczbą skończoną różną od zera. Np. funkcja $n(n+1)/2$ jest rzędu n^2, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Jeśli granica $f(n)/g(n)$ przy n dążącym do ∞ jest równa 1, to mówimy, że funkcje **są asymptotycznie równe** i piszemy $f(n) \approx g(n)$. Stosuje się też zapis $f(n) \sim g(n)$. Powtarzając powyższe rachunki łatwo sprawdzić, że

$$\frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Zadania

1. Które z poniższych ciągów są zbieżne:

a) $a_n = n/(n+3)$; b) $b_n = 3^n$; c) $c_n = 1 + (-1)^n$; d) $d_n = n - n^2$?

2. Przekształć odpowiednio wyraz ciągu i oblicz granicę:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$; b) $b_n = \dfrac{-4n^3 + n}{2n^2 + n^2 + 1}$; c) $c_n = \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$; d) $d_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$.

3. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{1 + 2 + \ldots + 2n}$; b) $b_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{(n+1) + (n+2) + \ldots + 2n}$.

4. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2 + n} - n$; c) $c_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$.

5. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$; b) $b_n = \dfrac{5^n + 2^n}{5^n + 3^n}$; c) $c_n = \dfrac{123^n + 231^n}{312^n}$; d) $d_n = \dfrac{1707^n + (-287)^n}{1783^n + (-212)^n}$.

6. Pośród poniższych ciągów wskaż rozbieżne do ∞ oraz rozbieżne do $-\infty$:

a) $a_n = \dfrac{n^2}{n-1}$; b) $b_n = n^3 - n$; c) $c_n = 2^n - 3^n$; d) $d_n = 2^n + (-2)^n$.

7. Niech L_n oraz S_n oznaczają odpowiednio obwód i pole n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.
a) Podaj granice obu ciągów. Nie wykonuj żadnych rachunków!
b) Wywnioskuj stąd granicę ciągu $a_n = 2n \sin(\pi/n)$.

8. Podaj przykłady ciągów $a_n \to 0$ oraz $b_n \to \infty$ takich, że ich iloczyn:
a) jest zbieżny do 1; b) zbieżny do 0; c) rozbieżny do nieskończoności.

Przykłady te pokazują, że $0 \cdot \infty$ jest **wyrażeniem nieoznaczonym** — nie można mu przypisać żadnego znaczenia (wartości). Pokaż, że wyrażeniem nieoznaczonym jest też $\infty - \infty$.

9. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$; b) $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$.

Pamiętaj o dziedzinie!

10. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$; b) $b_n = \sqrt[n]{n^2 + n + 1}$; c) $c_n = \dfrac{n + \sin n}{n + \cos n}$; d) $d_n = \sqrt[n]{3^n + n^3}$.

11. Korzystając z programu Wolfram Alpha® oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n}$ za pomocą instrukcji

$$\lim(n^2 + n)^{1/2} - (n^3 + n)^{1/3}, \; n- > \text{infinity}$$

Ten pierwiastek kwadratowy można też zapisać w postaci $\mathrm{sqrt}(n^2 + n)$. Oblicz w podobny sposób granicę ciągu $b_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

12. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

13. Sprawdź, że współczynnik newtonowski $\binom{n}{3}$ jest rzędu n^3. Analogicznie dla $\binom{n}{k}$.

14. Dla jakiego a współczynnik $\binom{n}{k}$ jest asymptotycznie równy an^k?

15.* Wykaż, że n^3 jest rzędu niższego niż 2^n, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0.$$

Uzasadnij analogiczny wynik dla n^k.
Wsk.: Z tożsamości

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

wynika, że dla $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność $\binom{n}{4} < 2^n$.

2.2 Trochę teorii i algorytm Herona

Zbieżność i ograniczoność - Heron, rekursja i pierwiastki - Zadania*

Pokażemy tu, dlaczego w niektórych rachunkach istotną rolę odgrywają *twierdzenia o istnieniu*. A ponadto poznamy zdumiewająco prosty algorytm obliczania pierwiastków, znany Heronowi (I w. n.e.), a możliwe, że nawet Babilończykom — 4000 lat temu.

Zbieżność a ograniczoność

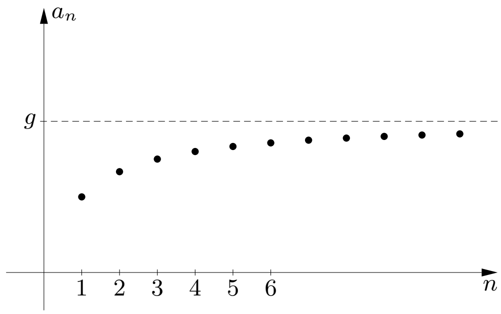
Mówimy, że ciąg a_n jest **ograniczony**, jeżeli wszystkie jego wyrazy leżą w pasie ograniczonym prostymi $y = m$ (ograniczenie dolne ciągu) oraz $y = M$ (ograniczenie górne ciągu).

Zauważ, iż zbieżność ciągu geometrycznie oznacza, że dalekie wyrazy ciągu leżą *w pobliżu* pewnej prostej. Ograniczoność oznacza tylko, że wyrazy ciągu mieszczą się w pewnym *pasie* ograniczonym prostymi. Tak więc zbieżność jest warunkiem mocniejszym niż ograniczoność, co wyraża poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.6 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, o czym świadczy ciąg $a_n = (-1)^n$ — jest ograniczony, ale nie jest zbieżny. Zachodzi jednak twierdzenie następujące:

Twierdzenie 2.7 *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*



Rysunek powinien przekonać o intuicyjnej oczywistości tego twierdzenia. Ścisły dowód nie jest trudny, ale odwołuje się do formalnej definicji granicy.

Poniższy przykład ilustruje rolę tego twierdzenia w zadaniach rachunkowych. *Poprawność* rachunków wymaga tu uzasadnienia, że szukana granica istnieje.

Przykład 2.3 Wykaż, że ciąg zadany rekurencją

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Rozwiązanie: Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykażemy, że ciąg jest rosnący i ograniczony przez 2.

1. Ciąg a_n jest rosnący.

Oczywiście $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$. Załóżmy, że $a_n < a_{n+1}$. Wówczas

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

2. Ciąg a_n jest ograniczony.

Mamy $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Załóżmy, że $a_n < 2$. Wówczas

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Skoro ciąg jest rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny. Niech g będzie jego granicą. Zauważmy, że ciąg a_{n+1} to ciąg a_n przesunięty o jeden wyraz, zatem ciągi a_{n+1} oraz a_n mają tę samą granicę. Stąd

$$g^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1})^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + a_n) = 2 + g.$$

Tak więc $g^2 = 2 + g$, skąd $g = 2$ albo $g = -1$. Ponieważ granicą ciągu o wyrazach dodatnich jest liczba nieujemna, więc $g = 2$.

Uzyskany wynik zapisuje się niekiedy w postaci

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}} = 2.$$

Heron, rekursja i pierwiastki*

Jak już wspominaliśmy, bardzo pomysłowy algorytm obliczania pierwiastków kwadratowych znany był już Heronowi, prawie dwa tysiące lat temu. W literaturze znany jest jako *algorytm Herona* bądź *algorytm babiloński*, gdyż istnieją poszlaki (dość słabe), że mogli go znać już Babilończycy.

Obliczmy tą metodą $\sqrt{5}$. Algorytm Herona polega na wyznaczaniu kolejnych wyrazów ciągu zadanego warunkami

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{5}{a_n}}{2}.$$

Sama idea tego algorytmu jest prosta: gdy wyraz a_n przybliża $\sqrt{5}$ od dołu, to $5/a_n$ przybliża go od góry. Okazuje się, że wyraz a_{n+1} będący średnią arytmetyczną tych dwu liczb jest przybliżeniem (dużo!) lepszym niż poprzednie.

Skąd wiemy, że w **granicy** musimy dostać rzeczywiście $\sqrt{5}$. Na razie załóżmy, że granica istnieje i jest równa g. Wówczas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{5}{a_n}}{2} \to \frac{g + \frac{5}{g}}{2}.$$

Ale $a_{n+1} \to g$, gdyż a_{n+1} jest to ciąg a_n przesunięty o jeden wyraz. Zatem

$$g = \frac{g + \frac{5}{g}}{2}.$$

Mnożąc obie strony przez $2g$ otrzymamy $2g^2 = g^2 + 5$, skąd $g^2 = 5$. Zatem granica $g = \sqrt{5}$.

To, że ciąg ten rzeczywiście ma granicę jest oczywiste dla każdego kto próbuje w praktyce wykonać te rachunki — ten ciąg zbiega bardzo szybko. Ale *dowód* istnienia granicy jest dość żmudny. Należy wykazać, że ciągi wyrazów parzystych oraz wyrazów nieparzystych są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Równość obu granic wynika stąd, że różnica kolejnych wyrazów ciągu a_n dąży do zera.

Zadania

16. Zbadaj, które z poniższych ciągów są ograniczone:

a) $a_n = 2 + (-1)^n$; b) $b_n = \sin n + \cos n$; c) $c_n = 2^n - n^2$; d) $d_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}$.

17. Ciąg a_n jest ograniczony z dołu przez -4, a z góry przez 3. Podaj liczby ograniczające z dołu i z góry ciąg $b_n = a_n^2 + a_n$.

18. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że ciąg a_n określony rekurencją $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ jest ograniczony i rosnący. Znajdź jego granicę.

◇ ◇ ◇

19. Zastosuj metodę Herona do obliczenia $\sqrt{2}$. Korzystając z kalkulatora zbadaj, który z wyrazów ciągu będzie przybliżać $\sqrt{2}$ z błędem mniejszym niż $1/1\,000\,000$?

20. Wiedząc, że poniższy ciąg jest zbieżny znajdź jego granicę:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{5}{a_n^2}}{2}.$$

Zbuduj analogiczny ciąg o granicy $\sqrt[5]{5}$.

21. Rozważmy ciąg określony warunkami $a_1 = \sqrt{6}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.
a) Wykaż, że jest zbieżny i znajdź jego granicę.
b) Dla jakich wartości a_1 ciąg taki będzie stały?
c) Wykaż, że podobnie zdefiniowany ciąg będzie zbieżny przy dowolnym wyborze $a_1 \geqslant 0$.

2.3 Liczba π

Dwa klasyczne wzory - Od Egipcjan do Archimedesa - Jak to robił Archimedes? - Zadania*

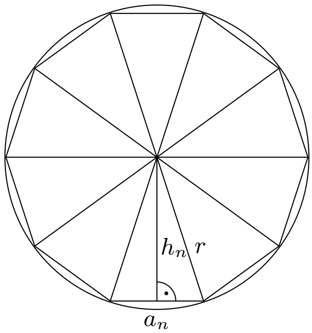
Liczbę π określa się jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Jest jedną z dwu (obok liczby e) najważniejszych stałych w matematyce. Każdy algorytm jej obliczania wykorzystuje przejścia graniczne.

Dwa klasyczne wzory

Z samej definicji π wynika, że pomiędzy obwodem L okręgu, a jego średnicą $2r$ zachodzi zależność $L/2r = \pi$, skąd znany wzór na obwód okręgu

$$L = 2\pi r.$$

Koło można przybliżać za pomocą wpisanych wielokątów foremnych. Każdy taki wielokąt dzieli się na n trójkątów równoramiennych, o podstawie a_n oraz wysokości h_n.



Wraz z n dążącym do nieskończoności, iloczyn na_n dąży do obwodu okręgu, a wysokość h_n do jego promienia. Zatem pole P koła o promieniu r jest równe

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n h_n}{2} = \lim_{n\to\infty} na_n \frac{h_n}{2} = L\frac{r}{2} = 2\pi r\frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Obydwa wzory mają praktyczną wartość pod warunkiem, że znamy wartość π z odpowiednią dokładnością. Dziś odczytamy ją z dowolnego kalkulatora: $\pi \approx 3,141592654$, a Wolfram Alpha® poda ją z dokładnością do 1000 miejsc po przecinku. Ale uzyskanie nawet kilku miejsc po przecinku nie jest zadaniem trywialnym.

Od Egipcjan do Archimedesa

Przybliżoną wartość π można wyznaczyć porównując obwód okręgu z obwodem wielokąta foremnego wpisanego w ten okrąg bądź na nim opisanego. Można zakładać, że okrąg ma promień 1. Wpisując w taki okrąg sześciokąt foremny otrzymujemy oczywiste szacowanie $2\pi > 6$, skąd $\pi > 3$. To najprostsze przybliżenie $\pi \approx 3$ pojawia się w Biblii (II Ks. Kronik 4:2, *Biblia Tysiąclecia*).

Egipcjanie wyrażali pole koła za pomocą średnicy $d = 2r$. W dzisiejszej symbolice:

$$P \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2,$$

co odpowiada wartości $\pi \approx 3,16$.

Obwód sześciokąta foremnego *opisanego* wynosi $4\sqrt{3}$. Łącząc to szacowanie z szacowaniem biblijnym otrzymamy

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

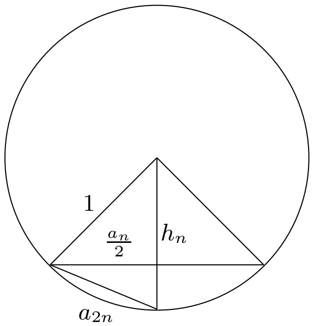
Wartość średnia tych ograniczeń to około 3,23. Ale już w III w. p.n.e. Archimedes otrzymał szacowanie dokładniejsze

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Wartość średnia obu ograniczeń to 3,14185.

Jak to robił Archimedes?*

Spójrzmy, jak otrzymać szacowanie Archimedesa. W tym celu wyznaczymy najpierw zależność pomiędzy bokiem foremnego $2n$-kąta wpisanego w okrąg o promieniu 1, a bokiem analogicznego n-kąta.



Oznaczmy przez a_n oraz h_n odpowiednio bok i wysokość trójkąta w n-kącie foremnym. Wówczas

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (1 - h_n)^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - 2h_n + h_n^2.$$

A ponieważ

$$h_n^2 = 1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2,$$

więc

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - 2h_n + \left[1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2\right] = 2 - 2h_n = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}.$$

Zatem

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Bok sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy to $a_6 = 1$. Z powyższego wzoru otrzymujemy $a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0,5176381$. Przybliżenie obwodu koła za pomocą 12-kąta foremnego odpowiada zatem przybliżeniu $2\pi \approx 12a_{12}$, skąd $\pi \approx 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,105828$.

Wychodząc od a_{12} otrzymamy kolejno a_{24}, a_{48} oraz a_{96}. Ta ostatnia wartość pozwala uzyskać dolne szacowanie Archimedesa. Podobnie, analizując wielokąty opisane, otrzymamy szacowanie górne.

Zadania

22. Pośród poniższych liczb znajdź najlepsze przybliżenie π:

$$\frac{22}{7}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}.$$

23. Oblicz obwód sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1.

24. Przyjmijmy $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Można wykazać, że oba ciągi mają wspólną granicę π. Oblicz wartości wyrazów a_1 oraz b_1.

2.4 Archimedes

Archimedes (ok. 287 p.n.e. - 212 p.n.e.), powszechnie uchodzi za największego matematyka starożytności. Niemal całe życie spędził w Syrakuzach na Sycylii (w owym czasie była to grecka kolonia), choć przez jakiś czas przebywał prawdopodobnie w Aleksandrii — najważniejszym centrum naukowym epoki. Tam mógł spotkać Eratostenesa i innych następców Euklidesa. Zginął z ręki rzymskiego żołnierza podczas oblężenia Syrakuz. Archimedes przeszedł też do historii jako wielki wynalazca (m.in. śruba Archimedesa) i oczywiście fizyk (*Eureka!*).

Jego dorobek matematyczny obejmuje m.in. wspomnianą w tekście metodę przybliżania π, obliczenie pola odcinka paraboli, a przede wszystkim odkrycie metody obliczania objętości kuli. Archimedes odkrył tę metodę za pomocą bardzo finezyjnego rozumowania, wykorzystując prawo dźwigni. Później, w rozprawie *O kuli i walcu* dał ścisłe, geometryczne wyprowadzenie swojej metody pokazując, że objętość kuli to 2/3 objętości opisanego na niej walca. Wynik ten był dla Archimedesa źródłem szczególnej dumy. Archimedes życzył sobie, aby motyw kuli wpisanej w walec umieścić na jego grobie. Grób taki widział w Syrakuzach jeszcze Cyceron około roku 75 p.n.e.