Michał Niedźwiedź

ZBIÓR ZADAŃ Z KÓŁKA MATEMATYCZNEGO

Zadania ze szczegółowymi rozwiązaniami dla uczniów przygotowujących się do olimpiad i konkursów matematycznych

Część II

WYDAWNICTWO SZKOLNE OMEGA

Kraków 2018

Projekt okładki: Artur Młynarz

Konsultacja merytoryczna: Teresa Markiewicz

ISBN: 978-83-7267-709-9

Wydawnictwo Szkolne OMEGA, 30-552 Kraków, ul. Wielicka 44 C
tel. 12 4256 256; tel. kom. 662 152 899
www.ws-omega.com.pl e-mail: biuro@ws-omega.com.pl

Druk: Zakład Graficzny COLONEL SA, Kraków, ul. Dąbrowskiego 16

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Niniejsza książka to kontynuacja zbioru zadań wydanego w 2010 roku[1]. Są to materiały z prowadzonego przeze mnie do 2011 roku przy Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego Kółka Matematycznego dla gimnazjalistów (a przed reformą wprowadzającą gimnazja dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej).

Większość rozdziałów to materiał przygotowany na kilka godzin lekcyjnych pracy. Na początku każdego rozdziału znaleźć można treści zadań (te, które wydały mi się trudniejsze, zostały wyróżnione gwiazdką), potem krótkie wskazówki do każdego zadania (często jest to jedno zdanie, mające zasugerować pomysł prowadzący do rozwiązania), a w końcu pełne rozwiązania wszystkich zadań.

Czytelnik może oczywiście zadanie rozwiązać innym sposobem. Niejednokrotnie może to być sposób łatwiejszy, ciekawszy czy krótszy od opisanego przeze mnie.

Podobnie jak w pierwszej części książki, tu również tematyka zajęć obejmuje treści obecne w podstawie programowej gimnazjum oraz ich rozszerzenia z uwzględnieniem zagadnień pojawiających się w różnych konkursach matematycznych (między innymi w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów). W szczególności zakładam znajomość wzorów skróconego mnożenia, twierdzenia Talesa oraz twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym (tych treści nie zawiera obecna podstawa programowa gimnazjum). W podanych rozwiązaniach nie używam natomiast (nawet wtedy, gdy bardzo by to skróciło pracę) wprowadzanej w liceum trygonometrii oraz metody rozwiązywania równań kwadratowych z pomocą wyróżnika Δ.

Numeracja zadań i rozdziałów w zbiorze jest kontynuacją z poprzedniej książki.

Życzę sukcesów w konkursach matematycznych i dalszego rozwoju swoich zainteresowań.

Michał Niedźwiedź

[1] Zob. [11].

Zestaw 16. WOKÓŁ LICZBY 2010

1. Zadania

Zadanie 168. RÓWNANIE DIOFANTYCZNE

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b, dla których spełniony jest warunek

$$20a^2 + 10b^2 = 2010.$$

Zadanie 169. NAJMNIEJSZY DZIELNIK

Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią różną od 1, która jest dzielnikiem liczby $2^{2010} + 1$.

Zadanie 170. OSTATNIA CYFRA

Ustal, jaka jest ostatnia cyfra liczby

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2009^{2009} + 2010^{2010}.$$

Zadanie 171. RÓWNANIE Z MODUŁEM

Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych równania

$$\big||x + 2010| + x + 2010\big| = |x - 2010|.$$

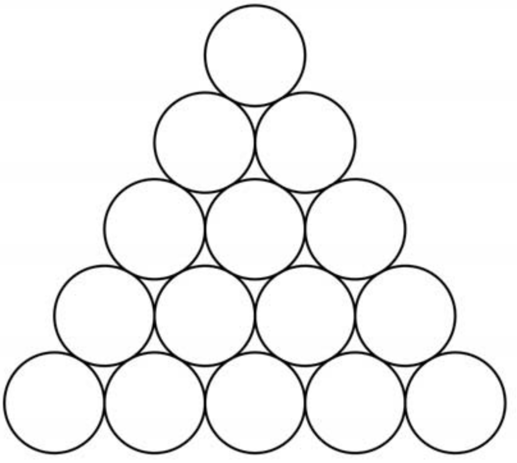
Zadanie 172. SUMY

Na długim pasku papieru wypisano kolejno obok siebie 2010 wybranych liczb naturalnych. Liczby są dobrane w taki sposób, aby iloczyn każdych siedmiu sąsiednich wynosił 2010. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy tych 2010 liczb? Jaka jest największa możliwa wartość tej sumy?

Zadanie 173. LICZBY W KÓŁKACH[2]

Koła na planszy ułożono w kształt trójkąta mającego 5 kół na każdym boku (rysunek 16.1.). W koła wpisano liczby w taki sposób, że suma liczb w każdych trzech stycznych kołach wynosi 2010. Ile wynosi suma liczb w trzech kołach położonych w wierzchołkach trójkąta? Dla jakich wielkości boku trójkąta innych niż 5 można tą sumę podać?

[2]Pomysł częściowo zaczerpnięty z zadania z Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej 2010.



Rysunek 16.1. Zadanie 173.

Zadanie 174. MAKSIMUM[3]

Jaką największą wartość może przyjąć wyrażenie

$$\frac{1}{a+\frac{2010}{b+\frac{1}{c}}},$$

w którym a, b i c są dodatnimi liczbami naturalnymi jednocyfrowymi różnymi między sobą?

Zadanie 175. KOLOROWE ŻETONY

Na stole leży 2010 żetonów – połowa z nich jest koloru białego, a połowa czarnego. Wykonujemy serię ruchów wg następujących zasad:

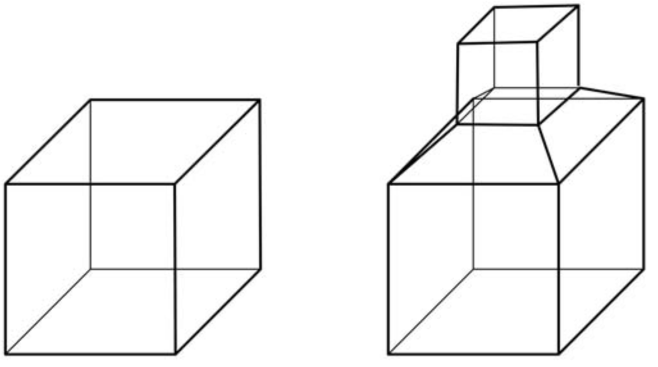
1. Zdejmujemy ze stołu 50 dowolnych żetonów.
2. Jeśli wśród zdjętych żetonów liczba białych była parzysta, dokładamy na stół jeden biały żeton.
   Jeśli zaś wśród zdjętych żetonów liczba białych była nieparzysta, dokładamy na stół jeden czarny żeton.
3. Sprawdzamy, czy na stole jest co najmniej 50 żetonów. Jeśli tak, przechodzimy do punktu 1 i wykonujemy kolejny ruch. Jeśli nie, kończymy zdejmowanie żetonów.

Ile żetonów zostanie na stole po wykonaniu ostatniego ruchu i jakie będą ich kolory?

[3] Zadanie z Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej z roku 2010.

Zadanie 176. ROZBUDOWA SZEŚCIANU

Wyobraźmy sobie sześcian. Możemy go rozbudowywać w następujący sposób:
nad środkiem dowolnej kwadratowej ściany budujemy nowy sześcian (o krawędziach równoległych do odpowiednich krawędzi wyjściowego sześcianu), umieszczając go na *rusztowaniu* utworzonym przez cztery trapezy równoramienne łączące nasz nowy sześcian z krawędziami wybranej kwadratowej ściany (rysunek 16.2.).



Rysunek 16.2. Zadanie 176.

Tak uzyskaną figurę możemy ponownie rozbudować, wybierając na początek jakąś kwadratową ścianę. Rozbudowę możemy kontynuować dowolnie długo, pamiętając tylko, że jeśli na nowy sześcian nie ma miejsca (przecina się z już zbudowanymi częściami naszej bryły), to nie możemy go umieścić w wybranym miejscu.
Czy w wyniku pewnej liczby takich operacji można uzyskać:

a) bryłę mającą 2010 wierzchołków?

b) bryłę mającą 2010 krawędzi?

c) bryłę mającą 2010 ścian?

2. Wskazówki

Wskazówka do zadania 168.

Łatwo zauważyć, że b musi być liczbą nieparzystą mniejszą od 14. Wystarczy zatem rozważyć kilka przypadków.

Wskazówka do zadania 169.

Można próbować zastosować cechy podzielności dla małych liczb nieparzystych.

Wskazówka do zadania 170.

Można zauważyć, że ostatnia cyfra potęgi liczby naturalnej zależy tylko od ostatniej cyfry tej liczby – wystarczy zatem zastąpić podstawy wszystkich potęg liczbami jednocyfrowymi.

Wskazówka do zadania 171.

Proponuję rozważyć trzy przypadki:

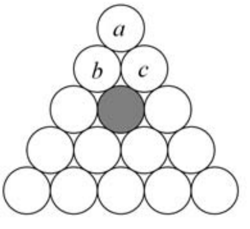
1. $x \geqslant 2010$;
2. $-2010 < x < 2010$;
3. $x \leqslant -2010$.

Wskazówka do zadania 172.

Na początek warto rozłożyć liczbę 2010 na czynniki pierwsze. To ułatwi rozważenie przypadków. Warto również zauważyć (i uzasadnić), że każda liczba musi się powtarzać co 7 pozycji (np. jeśli pierwszą napisaną na pasku liczbą jest n, to liczba n będzie również na miejscu ósmym, piętnastym itd.).

Wskazówka do zadania 173.

Oznaczmy liczby wpisane w trzy górne koła jako a, b i c. Wiadomo, że $a+b+c = 2010$. Jaka liczba musi być wpisana w szare koło? Czy można w ten sposób uzupełnić pozostałe liczby? Jakie liczby znajdą się w narożnych polach trójkąta?



Rysunek 16.3. Zadanie 173.

Wskazówka do zadania 174.

Wystarczy wykorzystać fakt, że (dla liczb dodatnich) jeśli ułamki mają jednakowe liczniki, to większy jest ten, który ma mniejszy mianownik.

Wskazówka do zadania 175.

Łatwo ustalić, ile żetonów zostanie na końcu na stole, obliczając, jak zmienia się ich liczba po każdym ruchu. W ustaleniu koloru pomoże rozważenie parzystości liczby żetonów czarnych i białych .

Wskazówka do zadania 176.

Sześcian ma 8 wierzchołków, 12 krawędzi i 6 ścian. Można rozważyć, jak zmienia się liczba wierzchołków, krawędzi i ścian po dołożeniu kolejnego sześcianu.

3. Rozwiązania

Rozwiązanie zadania 168.

Po podzieleniu obu stron równania przez 10 otrzymujemy

$$2a^2 + b^2 = 201.$$

Liczba $2a^2$ jest parzysta, więc aby uzyskać nieparzystą sumę 201, liczba b^2 (czyli również b) musi być nieparzysta.

Liczby $2a^2$ i b^2 są dodatnie, więc $b^2 < 201$, czyli $b \leqslant 14$.

Liczba b jest więc nieparzysta, dodatnia i mniejsza od 14. Rozważmy możliwe wartości b, sprawdzając, kiedy a będzie liczbą całkowitą:

b	a^2	a
1	100	10
3	96	a nie jest całkowite
5	88	a nie jest całkowite
7	76	a nie jest całkowite
9	60	a nie jest całkowite
11	40	a nie jest całkowite
13	16	4

Zadanie ma zatem dwa rozwiązania: $a = 4$, $b = 13$ oraz $a = 10$, $b = 1$.

Rozwiązanie zadania 169.

Liczba $2^{2010} + 1$ jest nieparzysta, nie ma więc dzielników parzystych.

Sprawdźmy, czy ta liczba dzieli się przez 3.

$$2^{2010} + 1 = (3-1)^{2010} + 1.$$

Ale

$$(3-1)^{2010} = (3-1)\cdot(3-1)\cdot(3-1)\cdot\ldots\cdot(3-1).$$

Po zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania do prawej strony równania otrzymamy wiele składników podzielnych przez 3 i tylko jeden składnik niepodzielny przez 3 – uzyskany z iloczynu $(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)$ (2010 *minus jedynek*).

Zatem liczba 2^{2010} jest o 1 większa od wielokrotności 3, czyli $2^{2010} + 1$ nie jest[4] liczbą podzielną przez 3.

Sprawdźmy, czy liczba $2^{2010} + 1$ jest podzielna przez 5.

Ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 2 powtarzają się okresowo:

- ostatnią cyfrą 2^1 jest 2;
- ostatnią cyfrą 2^2 jest 4;

[4] To oczywiście można wykazać dużo szybciej, używając np. wzoru skróconego mnożenia na $(a+b)^{2010}$ lub stosując kongruencje (zob. jeden z dalszych rozdziałów tej książki).

- ostatnią cyfrą 2^3 jest 8;
- ostatnią cyfrą 2^4 jest 6;
- ostatnią cyfrą 2^5 jest 2;
- itd.

zatem ostatnią cyfrą liczby 2^{2010} jest 4. Wobec tego ostatnią cyfrą liczby $2^{2010}+1$ jest 5, liczba ta więc jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie zadania 170.

Zgromadźmy informacje potrzebne do rozwiązania zadania w tabelce:

ostatnia cyfra liczby	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ostatnia cyfra drugiej potęgi liczby	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
ostatnia cyfra trzeciej potęgi liczby	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
ostatnia cyfra czwartej potęgi liczby	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
ostatnia cyfra piątej potęgi liczby	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Zauważmy, że ostatnie cyfry powtarzają się okresowo.
Obliczmy osobno sumy ostatnich cyfr potęg, których ostatnie cyfry podstawy to kolejno 1, 2, 3 itd.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_1 = 1^1 + 11^{11} + 21^{21} + \cdots + 2001^{2001}$$

jest 1. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_1 to 1.

- Ostatnią cyfrą składników sumy

$$S_2 = 2^2 + 12^{12} + 22^{22} + \cdots + 2002^{2002}$$

jest na przemian 4 lub 6. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_2 to 4.

- Ostatnią cyfrą składników sumy

$$S_3 = 3^3 + 13^{13} + 23^{23} + \cdots + 2003^{2003}$$

jest na przemian 7 lub 3. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_3 to 7.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_4 = 4^4 + 14^{14} + 24^{24} + \cdots + 2004^{2004}$$

jest 6. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_4 to 6.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_5 = 5^5 + 15^{15} + 25^{25} + \cdots + 2005^{2005}$$

jest 5. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_5 to 5.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_6 = 6^6 + 16^{16} + 26^{26} + \cdots + 2006^{2006}$$

jest 6. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_6 to 6.

- Ostatnią cyfrą składników sumy

$$S_7 = 7^7 + 17^{17} + 27^{27} + \cdots + 2007^{2007}$$

jest na przemian 3 lub 7. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_7 to 3.

- Ostatnią cyfrą składników sumy

$$S_8 = 8^8 + 18^{18} + 28^{28} + \cdots + 2008^{2008}$$

jest na przemian 6 lub 4. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_8 to 6.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_9 = 9^9 + 19^{19} + 29^{29} + \cdots + 2009^{2009}$$

jest 9. Składników tych jest 201, więc ostatnia cyfra sumy S_9 to 9.

- Ostatnią cyfrą każdego ze składników sumy

$$S_{10} = 10^{10} + 20^{20} + 30^{30} + \cdots + 2010^{2010}$$

jest 0. Składników tych jest 201 i ostatnia cyfra sumy S_{10} to 0.

Podsumowując: ostatnia cyfra sumy

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2009^{2009} + 2010^{2010} =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10}$$

jest równa ostatniej cyfrze sumy

$$1+4+7+6+5+6+3+6+9+0$$

i jest to cyfra 7.

Rozwiązanie zadania 171.

Rozważmy trzy przypadki:

1. $x \geqslant 2010$.
   Wtedy równanie przyjmuje postać:
   $$x+2010+x+2010 = x-2010,$$
   czyli
   $$x=-6030,$$
   co nie jest rozwiązaniem w tym przypadku (bo $-6030 \not\geqslant 2010$).
2. $-2010<x<2010$.
   Wtedy
   $$|x+2010+x+2010| = 2010-x$$
   $$|2x+4020| = 2010-x$$
   $$2x+4020 = 2010-x$$
   $$3x = -2010$$
   $$x = -670.$$
   Ta liczba spełnia wymaganą nierówność, jest więc rozwiązaniem równania.
3. $x \leqslant -2010$.
   Równanie wygląda wtedy następująco:
   $$|-x-2010+x+2010| = 2010-x$$
   $$0 = 2010-x$$
   $$x = 2010,$$
   co nie spełnia wymaganej nierówności.

Równanie ma zatem jedno rozwiązanie: $x=-670$.

Rozwiązanie zadania 172.

Oznaczmy kolejne liczby na pasku jako $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2010}$.

Wiadomo, że
$$n_i \cdot n_{i+1} \cdot n_{i+2} \cdot \ldots \cdot n_{i+6} = 2010.$$

Ponieważ jednocześnie
$$n_{i+1} \cdot n_{i+2} \cdot n_{i+3} \cdot \ldots \cdot n_{i+7} = 2010,$$

więc $n_i = n_{i+7}$, czyli początkowe 7 liczb powtarza się okresowo aż do końca.

Reszta z dzielenia 2010 przez 7 wynosi 1, więc pierwsza liczba wystąpi na pasku w sumie 288 razy, a kolejne (druga, trzecia itd. aż do szóstej) po 287 razy.

Rozłóżmy 2010 na czynniki pierwsze:

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67.$$

Najmniejszą sumę uzyskamy więc, gdy przyjmiemy $n_1 = 1$, a wśród pozostałych sześciu początkowych liczb umieścimy 2, 3, 5, 67 i dwie jedynki. Suma ta wyniesie

$$288 \cdot 1 + 287 \cdot (2+3+5+67+1+1) = 22961.$$

Największą sumę uzyskamy, zapisując na pasku liczbę 2010, potem 6 jedynek, 2010, 6 jedynek itd. Największa suma wynosi

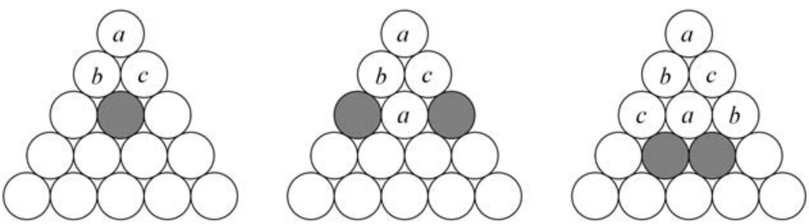
$$288 \cdot 2010 + 287 \cdot (1+1+1+1+1+1) = 580602.$$

Rozwiązanie zadania 173.

Rozmieśćmy w trzech górnych kołach liczby a, b i c. Wiadomo, że

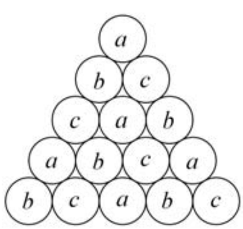
$$a+b+c = 2010.$$

Jaka liczba znajdzie się w szarym polu? Szare pole sąsiaduje z liczbami b i c, musi się więc w nim znaleźć liczba a. Analogicznie możemy uzupełnić kolejne pola diagramu.



Rysunek 16.4. Zadanie 173.

Cały diagram będzie wyglądać więc tak:



Rysunek 16.5. Zadanie 173.

W narożnych polach znalazły się liczby a, b i c, zatem ich suma wynosi 2010.

Łatwo zauważyć, że podobnie będzie dla trójkątów o bokach 2 i 3. W trójkącie o boku 4 wszystkie trzy narożne liczby będą równe.

Ogólnie wraz ze wzrostem boku trójkąta lewa narożna liczba to kolejno

$$b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c \text{ itd.},$$

a prawa:

$$c,\ b,\ a,\ c,\ b,\ a,\ c,\ b, \ldots.$$

Jeżeli zatem bok trójkąta jest liczbą postaci $3n$ lub $3n+2$, to suma narożnych liczb wynosi 2010. Jeśli natomiast bok trójkąta jest liczbą postaci $3n+1$, to wszystkie trzy narożne liczby są równe i ich suma może przyjmować różne wartości.

Rozwiązanie zadania 174.

Aby wyrażenie

$$\frac{1}{a+\frac{2010}{b+\frac{1}{c}}}$$

przyjęło wartość największą, liczby a i c muszą być możliwie najmniejsze (czyli 1 i 2), zaś b musi być jak największe (zatem $b=9$).
Wystarczy zatem rozważyć dwie liczby:

$$\frac{1}{1+\frac{2010}{9+\frac{1}{2}}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2+\frac{2010}{9+\frac{1}{1}}}.$$

Łatwo obliczyć, że pierwsza z nich to

$$\frac{1}{1+211\frac{11}{19}},$$

a druga

$$\frac{1}{203},$$

czyli druga z nich jest większa.

Rozwiązanie zadania 175.

W każdym ruchu zdejmujemy 50 żetonów i dokładamy 1, czyli liczba żetonów na stole zmniejsza się o 49. Ponieważ $49\cdot 41=2009$, więc po 41 ruchach na stole pozostanie jeden żeton.
Rozważmy, jak zmieniała się liczba czarnych żetonów. Na początku było ich 2005 – czyli liczba nieparzysta.

- Jeśli zdjęliśmy parzystą liczbę czarnych (zdejmując parzystą liczbę białych, zdejmujemy automatycznie parzystą liczbę czarnych, bo razem zdejmujemy ich 50), to dołożyliśmy biały, czyli liczba czarnych dalej pozostała nieparzysta (bo zmniejszyła się o liczbę parzystą).

- Jeśli zdjęliśmy nieparzystą liczbę czarnych (białych także nieparzystą), to dołożyliśmy jeden czarny, zatem liczba czarnych na stole dalej pozostała nieparzysta.

Po każdym ruchu na stole jest zatem nieparzysta liczba czarnych żetonów. Oznacza to, że po ostatnim ruchu liczba czarnych nie może wynosić 0 (0 jest liczbą parzystą), a więc ostatni pozostały żeton musi być koloru czarnego.

Rozwiązanie zadania 176.

Rozważmy możliwe przypadki:

a) Sześcian ma 8 wierzchołków. Dobudowanie kolejnego sześcianu zgodnie z warunkami zadania powiększa liczbę wierzchołków bryły o 8 - zatem liczba wierzchołków po dobudowaniu n sześcianów będzie równa $8 + 8n$ - będzie więc liczbą podzielną przez 8. Ponieważ 2010 nie jest podzielne przez 8, nie da się uzyskać 2010 wierzchołków.

b) Sześcian ma 12 krawędzi. Każda rozbudowa zwiększa liczbę krawędzi o 16 (12 krawędzi nowego sześcianu oraz 4 krawędzie będące ramionami trapezów). Po n rozbudowach mamy $12 + 16n$ krawędzi. Jest to liczba podzielna przez 4. Ponieważ 2010 nie dzieli się przez 4, nie da się uzyskać 2010 krawędzi.

c) Sześcian ma 6 ścian. Przy rozbudowie usuwamy jedną ścianę i dokładamy 4 trapezy oraz 5 ścian nowego sześcianu – w sumie liczba ścian zwiększa się o 8. Po n rozbudowach mamy $6 + 8n$ ścian, czyli liczbę, która z dzielenia przez 8 daje resztę 6. Liczba 2010 daje resztę 2, zatem nie można uzyskać 2010 ścian.

Zestaw 17. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

1. Zadania

Zadanie 177. RÓŻNICA KWADRATÓW

Udowodnij, że zbiór różnic kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieujemnych jest równy zbiorowi nieparzystych liczb naturalnych.

Zadanie 178. RÓWNANIE WYKŁADNICZE

Rozwiąż równanie:

$$2^{2a} - 2^{a+1} + 2^0 = 0.$$

Zadanie 179. RESZTA Z DZIELENIA

Wykaż, że reszta z dzielenia kwadratu liczby naturalnej przez 4 nie może być równa 3.

Zadanie 180. PIERWIASTEK W PIERWIASTKU

Przedstaw wyrażenie $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ w postaci sumy pierwiastków kwadratowych z liczb naturalnych.

Zadanie 181. DWIE NIEWIADOME

Rozwiąż równanie:

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y.$$

Zadanie 182. PODZIELNOŚĆ

Udowodnij, że liczba $2^{64} - 1$ jest podzielna przez 15.

Zadanie 183. UKŁAD RÓWNAŃ[5]

Udowodnij, że układ równań:

$$\begin{cases} k^2 + 2l & = & 19 \\ l^2 + 2m & = & 9 \\ m^2 + 2k & = & 8 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

[5]Zadanie z olimpiady Ukraina 1998.

Zadanie 184. WARTOŚĆ NAJMNIEJSZA

Podaj, ile wynosi najmniejsza wartość wyrażenia $x^4 - 7x^2 - 4x + 22$.

Zadanie 185. NIERÓWNOŚĆ

Udowodnij, że dla liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność:

a) $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$;

b) $a^4 + b^4 \geqslant ab^3 + a^3b$.

Zadanie 186. TRZY NIEWIADOME

Znajdź wszystkie x, y, z, takie że

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

Zadanie *187. TRZY KWADRATY

Dane są liczby naturalne m, n, k, takie że $m^2 + n^2 = k^2$. Udowodnij, że iloczyn mnk jest liczbą:

a) podzielną przez 3;

b) podzielną przez 12;

c) podzielną przez 60.

2. Wskazówki

Wskazówka do zadania 177.

Nieparzyste liczby naturalne można zapisać jako liczby postaci

$$2n+1, \qquad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Wskazówka do zadania 178.

Z własności potęgowania wiadomo, że $2^{2a} = (2^a)^2$, zaś $2^{a+1} = 2 \cdot 2^a$.

Wskazówka do zadania 179.

Każdą liczbę naturalną można zapisać w postaci

$$2n, \ n \in \mathbb{N}, \quad \text{gdy jest parzysta}$$

lub

$$2n+1, \ n \in \mathbb{N}, \quad \text{gdy jest nieparzysta.}$$

Wskazówka do zadania 180.

Można wykorzystać fakt, że pierwiastkowanie jest związane z potęgowaniem:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Wskazówka do zadania 181.

Można pomnożyć obie strony równania przez 2, a następnie odpowiednio pogrupować wyrazy, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

Wskazówka do zadania 182.

Wystarczy kilkakrotnie zastosować wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i zauważyć, że $15 = 2^4 - 1$.

Wskazówka do zadania 183.

Można spróbować dodać stronami wszystkie równania i przekształcić uzyskaną sumę tak, by dało się skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

Wskazówka do zadania 184.

Na początek można podane wyrażenie przekształcić do postaci

$$x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 - 4x + 4 + 2.$$

Wskazówka do zadania 185.

Można przekształcić nierówności do postaci wyrażenia porównywanego do zera, i korzystając ze wzorów skróconego mnożenia udowodnić, że uzyskane wyrażenie jest nieujemne.

Wskazówka do zadania 186.

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, można rozwiązywane równanie doprowadzić do postaci iloczynu kilku wyrażeń, porównywanego do zera. Iloczyn przyjmuje wartość zero tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników wynosi 0.

Wskazówka do zadania 187.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest rozważenie możliwych reszt z dzielenia liczb m, n i k:

a) przez 3;
b) przez 4;
c) przez 5.

3. Rozwiązania

Rozwiązanie zadania 177.

Weźmy dwie kolejne liczby naturalne: n i $n+1$. Zatem

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1,$$

czyli dla $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy wszystkie liczby naturalne nieparzyste.

Rozwiązanie zadania 178.

Przekształćmy rozwiązywane równanie, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy:

$$2^{2a} - 2^{a+1} + 2^0 = 0,$$

$$(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a + 1 = 0,$$

$$(2^a - 1)^2 = 0,$$

czyli

$$2^a - 1 = 0,$$

$$2^a = 1,$$

zatem $a = 0$.

Rozwiązanie zadania 179.

Każdą liczbę naturalną można zapisać w postaci

$$2n, \; n \in \mathbb{N}, \quad \text{gdy jest parzysta}$$

lub

$$2n+1, \; n \in \mathbb{N}, \quad \text{gdy jest nieparzysta.}$$

Kwadrat liczby parzystej jest więc liczbą postaci

$$(2n)^2 = 4n^2,$$

czyli liczbą podzielną przez 4.
Kwadrat liczby nieparzystej natomiast jest liczbą postaci

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4\left(n^2 + n\right) + 1,$$

czyli liczbą, która z dzielenia przez 4 daje resztę 1.
Nie istnieją więc liczby naturalne, których kwadraty dają przy dzieleniu przez 4 resztę 3.

Rozwiązanie zadania 180.

Przekształćmy rozważane wyrażenie:

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{5+2\sqrt{5\cdot 2}+2} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}+\sqrt{2}| =$$
$$= \sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie zadania 181.

Pomnóżmy obie strony równania przez 2 i przekształćmy je:

$$x^2+y^2+1 = xy+x+y \quad /\cdot 2,$$
$$2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y = 0,$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 = 0,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 0.$$

Suma trzech kwadratów wynosi 0 tylko wtedy, gdy wszystkie trzy liczby podnoszone do kwadratu są zerami. Zatem

$$\begin{aligned} x-y &= 0,\\ x-1 &= 0,\\ y-1 &= 0, \end{aligned}$$

czyli równanie ma jedno rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x &= 1,\\ y &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania 182.

Zastosujmy wzór na różnicę kwadratów:

$$2^{64}-1 = \left(2^{32}-1\right)\cdot\left(2^{32}+1\right) =$$
$$= \left(2^{16}-1\right)\cdot\left(2^{16}+1\right)\cdot\left(2^{32}+1\right) =$$
$$= \left(2^{8}-1\right)\cdot\left(2^{8}+1\right)\cdot\left(2^{16}+1\right)\cdot\left(2^{32}+1\right) =$$
$$= \left(2^{4}-1\right)\cdot\left(2^{4}+1\right)\cdot\left(2^{8}+1\right)\cdot\left(2^{16}+1\right)\cdot\left(2^{32}+1\right).$$

Ponieważ $2^4-1=15$, więc liczba $2^{64}-1$ jest podzielna przez 15.