Markowe
Wykłady
z Matematyki

Markowe Wykłady z Matematyki

matematyka dyskretna

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Zdjęcie na okładce
Artur Zakrzewski

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–52–5

Wydanie II zmienione, Wrocław 2018
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: I-BiS Usługi Komputerowe – Wydawnictwo, spółka jawna.

Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że (. . .) są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

Każdy, kto gra w szachy lub rozwiązuje łamigłówki, rozwiązuje zadania matematyki dyskretnej.

L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi,
Discrete mathematics: Elementary and Beyond,
Springer Verlag 2003

Spis treści

Wstęp

Ważnym, choć niewystarczająco docenianym, aspektem matematyki jest to, że rezultaty, jakie otrzymujemy są często mniej interesujące niż użyte metody. Ta tendencja jest szczególnie wyraźna w kombinatoryce. [...] Rozwiązanie problemu często wymaga stworzenia nowych narzędzi matematycznych, które znajdują zastosowanie w bardzo różnych kontekstach.

Timothy Gowers, cyt. wg *The work of Endre Szemerédi*, www.abelprize.no

Książka może służyć jako podstawowy podręcznik matematyki dyskretnej dla studentów informatyki i matematyki, a także interesująca lektura dla ambitniejszych uczniów szkół średnich.

Co to jest matematyka dyskretna ...

W przeciwieństwie do analizy, a częściowo także algebry, kanon matematyki dyskretnej nie jest ściśle określony. W konsekwencji każda książka z matematyki dyskretnej obejmuje inny materiał. Dla nas punktem wyjścia jest krótki kurs kombinatoryki. Dwie kolejne części, poświęcone teorii grafów (z elementami geometrii kombinatorycznej) i teorii prawdopodobieństwa, pokazują istotne zastosowania kombinatoryki. W szczególności do rozważań czysto kombinatorycznych sprowadzają się dowody najgłębszych twierdzeń teorii grafów (twierdzenie Cayleya) i teorii prawdopodobieństwa (niektóre dowody twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a).

Można przyjąć, że części II, III oraz IV są od siebie niezależne.

W XX wieku w matematyce pojawił się nowy nurt badań. Postawiono pytania o charakter trudności (złożoności) teorii matematycznych, czy konkretnych problemów. Słynne twierdzenie Gödla i zagadnienie P-NP mieszczą się w tym właśnie nurcie. Tematyce tej poświęcona jest ostatnia część książki.

Matematyka dyskretna swym charakterem bardzo różni się od analizy. Analiza matematyczna tworzona była przez *filozofów przyrody* usiłujących zrozumieć ład Wszechświata. Matematykę dyskretną inspirowały zaś gry, hazard, łamigłówki i inne prozaiczne zastosowania. Tworzyli ją ludzie zajęci raczej zabawą niż zagadkami Kosmosu.

W konsekwencji wykłady z matematyki dyskretnej roją się od gier, łamigłówek i innych niezbyt poważnych zastosowań, a kolejne tematy są ze sobą stosunkowo luźno powiązane. Także tradycyjny styl wykładu różni matematykę dyskretną od analizy i innych działów matematyki. Częściej operuje się pojęciami bez ścisłej definicji, a rozumowania prowadzone są dość nieformalnie.

. . . i po co się jej uczymy

Tematyka, do której ograniczyliśmy się w tej książce, powinna być interesująca dla wszystkich matematyków i informatyków. Podstawy teorii grafów, teorii prawdopodobieństwa i teorii liczb (w tym protokół RSA) są dziś oczywistym elementem wykształcenia na tych kierunkach, bez względu na wybór specjalizacji. A twierdzenie Gödla stało się częścią kultury ogólnej.

Przez ostatnie kilkadziesiąt lat szeroko rozumiana kombinatoryka wraz z teorią grafów awansowała z pozycji skromnego kopciuszka matematyki do rangi jednej z jej centralnych dyscyplin. Za badania w tej dziedzinie przyznano Medal Fieldsa[1] (Timothy Gowers 1998), a także równie prestiżową Nagrodę Abela (Endre Szemerédi 2012). Jeden z siedmiu Problemów Milenijnych (p. str. 246) też mieści się w tym zakresie. Oprócz oczywistych związków pomiędzy kombinatoryka a informatyką, metody kombinatoryczne i teoriografowe wkroczyły do fizyki, biologii, a także nauk społecznych.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden aspekt. Matematyka dyskretna najszybciej daje pewne wyobrażenie o matematyce *współczesnej*. Mówimy tu często o wynikach sprzed zaledwie kilkudziesięciu lat (i nowszych), podczas gdy niemal cała klasyczna analiza powstała 250-300 lat temu.

[1]Medal Fieldsa przyznawany jest od roku 1936 za wybitne odkrycia matematyczne, co cztery lata czterem (początkowo dwóm) matematykom, którzy nie ukończyli 40 lat. Uchodzi za matematyczny odpowiednik Nagrody Nobla, ale towarzysząca mu nagroda pieniężna jest raczej symboliczna. Od roku 2001 przyznawana jest raz w roku konkurencyjna nagroda — Medal Abela, któremu towarzyszy nagroda w wysokości ok. miliona dolarów.

Biogramy

Podobnie jak w poprzednim tomie tego cyklu, osobną uwagę poświęcam najważniejszym matematykom, których nazwiska pojawiają się w tekście. Przyjąłem zasadę, że postacie omówione szerzej w *Analizie* nie mają osobnych biogramów tutaj. Z jednym wyjątkiem: Leonarda Eulera. Euler jest najważniejszą postacią w kombinatoryce (m.in. funkcje tworzące), w teorii grafów (wzór Eulera i grafy eulerowskie) i jedną z najważniejszych w teorii liczb. W naszych wykładach z teorii liczb mowa jest o funkcji Eulera i twierdzeniu Eulera, ale jego rola w rozwoju teorii liczb jest nieporównanie większa.

Rachunki w dobie komputera

W matematyce dyskretnej rachunki odgrywają rolę dość skromną. Nawet w bardzo obszernych kursach prawie nie ma *skomplikowanych rachunków*. Znacznie ważniejsze jest tu obcowanie z całą gamą bardzo rozmaitych *rozumowań* i *abstrakcyjnych pojęć*.

Jednak czasem pojawiają się typowe zadania rachunkowe. Przy takich okazjach pokazujemy podstawowe instrukcje programu Wolfram Alpha®. W zadaniach rachunkowych warto korzystać z tego bądź innych programów.

Zadania i problemy

Po każdym podrozdziale pojawia się seria zadań. Zadania umieszczone po potrójnym symbolu karo mogą wymagać pewnej pomysłowości. Czytelnik powinien jednak podejmować próbę rozwiązania przynajmniej części z nich. Na końcu książki znajdują się odpowiedzi bądź wskazówki do najbardziej typowych zadań i części zadań o charakterze twórczym.

Na początku każdej z pięciu części podajemy dwa przykładowe problemy. Ambitniejszy Czytelnik powinien próbować je rozwiązać zanim natrafi na nie — czasem w nieco innym sformułowaniu — w zadaniach (może się zdarzyć, że dopiero w jednej z dalszych części).

Rola dowodów

Jednym z najczęstszych pytań dziecka jest *dlaczego?* Dzięki odpowiedziom dziecko stopniowo zaczyna rozumieć świat. W matematyce odpowiedzią na pytanie *dlaczego?* jest dowód albo kontrprzykład. Niektóre dowody mogą sprawić istotną trudność, ale już sama próba zrozumienia bywa kształcąca. Matematyka bez dowodów jest jak opera bez muzyki: oczywiście można ograniczyć się do śledzenia samej akcji, ale nikt w ten sposób opery nie polubił.

Zmiany w nowym wydaniu

Pomiędzy ukazaniem się książki a niniejszym II wydaniem upłynęły cztery lata. W tym czasie ukazała się w tej serii osobna *Teoria liczb.* W tej sytuacji uznałem, że pięć rozdziałów poświęconych teorii liczb można usunąć, dzięki czemu książka stanie się krótsza, a więc bardziej przyjazna.

Osoby zainteresowane krótkim wykładem teorii liczb mogą sięgnąć do I wydania albo też przestudiować wykłady 1-3, 5-7 i 11 wspomnianej *Teorii liczb.*

♢ ♢ ♢

Pracując przez kilka lat nad książką systematycznie korzystałem z około 20-25 książek, pomijając okazjonalne wykorzystanie wielu innych. W tej sytuacji trudno jest wskazać najistotniejsze inspiracje. Z literatury dostępnej w języku polskim najwięcej zawdzięczam *Aspektom Kombinatoryki* Victora Bryanta. Książce L. Lovásza, J. Pelikána, K. Vesztergombi *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond* zawdzięczam przekonanie, że tak obszerny materiał można zmieścić na ok. 250 stronach. Kolejne książki Martina Ericksona, zwłaszcza jego *Pearls of Discrete Mathematics*, uświadamiały, że w tej dyscyplinie każdy wykład może być (i powinien) interesujący. Część zadań pochodzi z książki Arthura Engela *Problem-Solving Strategy.*

Literatura popularnonaukowa z matematyki w znacznej części oparta jest na matematyce dyskretnej. Tak więc na pewno da się tu wykryć jakieś zapożyczenia z klasycznych pozycji tej literatury, w szczególności z *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa[2], *Ostatnich rozrywek* i innych książek Martina Gardnera, artykułów z *Delty* oraz cytowanej w tekście książki Juliana Havila *Nonplussed!: Mathematical Proof of Implausible Ideas.*

Końcową wersję książki przejrzeli od strony merytorycznej Małgorzata Kuchta (kombinatoryka i teoria grafów), Rafał Sałapata (całość), Zbigniew Skoczylas (całość) i Tomasz Żak (prawdopodobieństwo). Dzięki ich wnikliwej lekturze udało się uniknąć subtelnych potknięć merytorycznych (kombinatoryka i prawdopodobieństwo są pod tym względem bardzo zdradliwe) i błędów rachunkowych.

Przy tej okazji dziękuję Tomaszowi Żakowi za zgodę na wykorzystanie fragmentów naszej wspólnej książki *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*, a także niektórych pomysłów z innych wspólnych książek.

[2] Książka ta wydana we Lwowie w 1938 roku doczekała się 10 przekładów i wciąż jest czytana.

Przez ostatnie kilka miesięcy, gdy książka weszła w fazę wydawniczą wiele czasu i pracy poświęcili książce jej Wydawcy Marian Gewert (który w szczególności wykonał rysunki, często bardzo pracochłonne) i Zbigniew Skoczylas. Mimo wieloletniego doświadczenia autorskiego za każdym razem jestem zdziwiony, jak wiele książka zyskuje na tym etapie, dzięki niezliczonej ilości drobnych uwag i sugestii natury językowej bądź edytorskiej.

W nowym wydaniu udało się usunąć sporo usterek zauważonych przez Czytelników: prof. Stanisława Radziszowskiego (Rochester Institute of Technology), dr. hab. Edytę Szymańską (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu), dr Barbarę Roszkowską (Politechnika Warszawska), dr. Jana Florka (Politechnika Wrocławska), mgr. Sławomira Wójcika (Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Wrocławskiej) oraz moich studentów Panów Damiana Fafułę, Bartosza Pawliczaka, Jana Pedryca i Tomasza Skalskiego.

Wszystkim wymienionym osobom gorąco dziękuję.

M.Z.

I

Kombinatoryka

— Więc pan chciałby przesadzać czternaście osób, co dzień w innej kolejności aż do wyczerpania wszystkich możliwych kombinacji, czy tak?
— Tak jest proszę pana.
— I co Pan sądzi, jak to długo będzie trwało, aż pan te wszystkie możliwe kombinacje wyczerpie?
— No, nie wiem . . . może nawet parę tygodni . . . ale musi być sprawiedliwość.
— Owszem, musi być (. . .) — ale będzie to, panie drogi, trwało — niech pan słucha: dwieście trzydzieści osiem milionów osiemset czterdzieści cztery tysiące sześćset trzydzieści trzy lata.
Osłupiałem, myśląc, że mam do czynienia z wariatem.

Julian Tuwim, *Cicer cum caule, czyli groch z kapustą*, Czytelnik Warszawa 1958-59

Nasz podstawowy kurs kombinatoryki jest krótki, ma 74 strony. Ograniczamy się głównie do kwestii, które są samoistnie interesujące bądź przydatne w dalszej części książki. Trzy początkowe wykłady to klasyczny wstęp, niemal elementarz kombinatoryki. Wykłady czwarty i piąty poświęcone permutacjom, dają pewne wprowadzenie w teorię grup — ważny dział algebry abstrakcyjnej. Wreszcie trzy końcowe poświęcone są liczbom Fibonacciego, Catalana i innym rekurencjom.

Dwa podstawowe pytania kombinatoryki — o liczbę permutacji oraz o liczbę kombinacji — mają długą historię. Można przyjąć, że w tej lub innej postaci rozważane były w Chinach, Indiach czy krajach Islamu tysiąc lat temu. Do permutacji i kombinacji sprowadza się mnóstwo zadań kombinatorycznych. Niektóre z nich są ciekawe, ale przy typowym zadaniu kombinatorycznym trudno zrozumieć, *dlaczego* kogokolwiek to interesuje.

Przez dłuższą część swej historii rozważania kombinatoryczne były częścią logiki (klasyfikacje), prozodii (badanie rytmiki wiersza) czy wręcz kwestii związanych z życiem codziennym.[3]

Wraz z rozwojem rachunku prawdopodobieństwa (Fermat i Pascal) kombinatoryka zaczęła nabierać bardziej naukowego charakteru. W roku 1666 Leibniz publikuje *Dissertatio de Arte Combinatoria*, dzieło o inspiracji filozoficznej, ale z wyraźnymi elementami matematycznymi, w którym po raz pierwszy pojawia się sam termin *kombinatoryka*. Niespełna 100 lat później wraz z Eulerem kombinatoryka wchodzi w okres dojrzałości, ale aż do połowy XX wieku pozostaje z dala od głównego nurtu matematyki.

♢ ♢ ♢

A oto dwa przykładowe problemy, które można rozwiązać za pomocą metod kombinatorycznych omawianych w naszej książce.

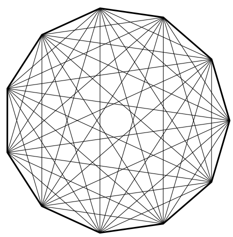
Problem 1

Zapisz za pomocą jednego współczynnika Newtona sumę

$$\binom{100}{0}^2 + \binom{100}{1}^2 + \binom{100}{2}^2 + \ldots + \binom{100}{99}^2 + \binom{100}{100}^2.$$

Problem 2

Umieśćmy na okręgu n punktów i połączmy każdą ich parę cięciwą. W ten sposób koło podzielone zostanie na pewną liczbę obszarów. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$, 3, 4 oraz 5 liczba tych obszarów to odpowiednio 2, 4, 8 oraz 16.



A ile obszarów jest na rysunku powyżej? Możesz przyjąć bez dowodu, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie. Wsk. Odpowiedź 1024 jest błędna.

[3] W roku 1629 Jeremias Drexel, Jezuita, profesor retoryki i wybitny kaznodzieja, opublikował dzieło, w którym wypisał wszystkie 720 permutacji sześciu liter. Wykazał w ten sposób, że 6 osób można przesadzać przez 360 dni w roku (pomija się tu 5 dni ścisłego postu) przy obiedzie i kolacji tak, aby za każdym razem osoby te siedziały inaczej.

Wykład 1

Permutacje i kombinacje, czyli sztuka mnożenia

Cztery płaszczyzny w położeniu ogólnym (żadne dwie z nich nie są równoległe, żadne trzy nie mają wspólnej krawędzi) dzielą przestrzeń na 15 części, pięć płaszczyzn — na 26 części, a sześć na 42. Z pozoru uzyskanie tych wyników wymaga sporej wyobraźni, ale metodami kombinatoryki można bez trudu znaleźć wzór ogólny.

1.1 Permutacje i kombinacje

Mnożyć czy dodawać? - Permutacje - Wzór Stirlinga i szacowanie rzędu - Permutacje częściowe - Kombinacje - Wzór Newtona - Zadania

Rozważać tu będziemy dwa rodzaje obiektów: permutacje — w których kolejność elementów jest istotna, oraz kombinacje — w których kolejność jest obojętna.

Mnożyć czy dodawać?

Rozważmy zbiór 26 liter alfabetu łacińskiego A, B, ..., X, Y, Z oraz 10 cyfr 0, 1, ..., 9. Gdy mamy wybrać literę **albo** cyfrę, możemy to zrobić na

$$26 + 10 = 36$$

sposobów. Jeżeli mamy wybrać literę **oraz** cyfrę (w tej właśnie kolejności), to otrzymamy

$$26 \cdot 10 = 260$$

uporządkowanych par A0, A1, ..., A9, B0, ..., Z9. Ogólnie, wybór typu **albo** prowadzi do dodawania, wybór typu **oraz** prowadzi do mnożenia. Korzystając w dalszych rachunkach z tej ostatniej zasady będziemy się powoływać na **regułę mnożenia**. Dodawać będziemy bez komentarza.

PRZYKŁAD 1.1 *Oblicz liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym.*

ROZWIĄZANIE: Z każdego wierzchołka wychodzi $n-3$ przekątnych, gdyż musimy pominąć ten wierzchołek i jego obu sąsiadów. Mnożąc przez liczbę wierzchołków otrzymujemy $n(n-3)$. Zauważmy jednak, że w ten sposób każdą przekątną liczymy dwa razy, więc ostateczny wynik to $n(n-3)/2$.

Permutacje

Mówiąc nieformalnie, **permutacja** skończonego zbioru, to ustawienie jego elementów w pewnej kolejności. Dwa elementy 1, 2 można ustawić na dwa sposoby: 12 albo 21. Dla zbioru złożonego z trzech elementów jest takich ustawień sześć:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321.$$

Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest

$$n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Można to ustalić bez ich wypisywania: na pierwszym miejscu mamy n możliwości, na drugim $n-1$, na trzecim $n-2$ itd.

Wzór Stirlinga i szacowanie rzędu

Talię 52 kart można zatem ułożyć na 52! sposobów. Zawsze warto mieć wyobrażenie o rzędzie wielkości, jakimi operujemy. Pomoże nam w tym wzór Stirlinga

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ze wzoru Stirlinga mamy

$$52! \approx \sqrt{104\pi}\left(\frac{52}{e}\right)^{52}.$$

Logarytmując (przy podstawie 10) obie strony otrzymujemy

$$\log 52! \approx \frac{1}{2}\log 104\pi + 52\log\frac{52}{e} \approx 67,9.$$

Oznacza to, że 52! jest liczbą mającą w zapisie dziesiętnym 68 cyfr.

Permutacje częściowe

W analogiczny sposób definiujemy **permutacje częściowe** (nazywane często **wariacjami bez powtórzeń**). Oto wszystkie dwuelementowe permutacje częściowe o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$12,\ 13,\ 14,\ 21,\ 23,\ 24,\ 31,\ 32,\ 34,\ 41,\ 42,\ 43.$$

W ogólnym przypadku mamy:

TWIERDZENIE 1.1 *Wszystkich permutacji częściowych długości k, o wyrazach ze zbioru m-elementowego, jest*

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1)) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

DOWÓD: Rzeczywiście, na pierwszym miejscu mamy m możliwości ustawienia (bo tyle jest elementów), na drugim już $m-1$, gdyż nie możemy powtórzyć pierwszego elementu, na trzecim $m-2$ możliwości, gdyż nie możemy wykorzystać dwu pierwszych, ..., wreszcie na k-tym miejscu mamy $m-(k-1)$ możliwości. Na mocy reguły mnożenia liczba możliwości wynosi

$$\underbrace{m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))}_{k \text{ czynników}} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))(m-k)!}{(m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Wzór ten często wykorzystywany jest w postaci początkowego iloczynu. Czasem jednak zapis za pomocą silni okazuje się bardziej przydatny.

Kombinacje

Kombinacją k-elementów z ustalonego zbioru skończonego nazywamy dowolny k-elementowy jego podzbiór. W gruncie rzeczy termin ten jest synonimem słowa *podzbiór*, ale gdy mówimy o kombinacjach zazwyczaj myślimy o podzbiorach ustalonej wielkości.

TWIERDZENIE 1.2 *Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dowód: Niech $C(n, k)$ oznacza nieznaną na razie liczbę kombinacji. Wyobraźmy sobie konkurs, który przebiega w dwu etapach. Najpierw wyłaniamy k finalistów, a następnie ustalamy porządek tych k najlepszych uczestników. Ponieważ k finalistów można wybrać na $C(n, k)$ sposobów, a ustalić ich kolejność na $k!$ sposobów, więc możliwych wyników końcowych jest

$$C(n, k)k!.$$

Z drugiej strony to samo można uzyskać, wybierając najpierw najlepszego uczestnika konkursu, potem drugiego itd. Mamy tu

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{możliwości.}$$

Porównując obydwa wyniki otrzymujemy

$$C(n, k)k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$

skąd zapowiedziany wzór

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na przykład spośród 7 elementów można wybrać 3 na

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ sposobów.}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy **współczynnikiem Newtona**. Zauważmy, że jest on równy ilorazowi zstępującego iloczynu $n(n-1)\ldots(n-(k-1))$ kolejnych k czynników przez $k!$. Ta uwaga okaże się istotna, gdy rozważać będziemy współczynniki Newtona z „licznikiem” ujemnym bądź ułamkowym.

Podstawowe własności współczynników Newtona wynikają bezpośrednio z definicji:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Wzór Newtona

Najważniejszym i najczęstszym zastosowaniem współczynników newtonowskich jest wzór dwumianowy Newtona.

TWIERDZENIE 1.3 (wzór dwumianowy Newtona)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n.$$

W Σ-notacji wzór dwumianowy przyjmuje postać:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

W *Analizie* daliśmy wskazówkę (p. str. 18, zad.19), jak wyprowadzić wzór Newtona za pomocą indukcji. Dowody indukcyjne rzadko jednak dają prawdziwe zrozumienie *dlaczego* jest tak, a nie inaczej. Tutaj naszkicujemy dowód kombinatoryczny.

Na podstawie wzorów na kwadrat, sześcian i ewentualnie dalsze potęgi sumy można *przypuszczać*, że ogólny wzór będzie miał postać:

$$(a+b)^n = a^n + ?a^{n-1}b + \ldots + ?a^kb^{n-k} + \ldots + ?ab^{n-1} + b^n.$$

Aby wyznaczyć współczynniki przy kolejnych składnikach, zbadajmy, skąd się one biorą:

$$(a+b)(a+b)\ldots(a+b) = \ldots + ?a^{n-k}b^k + \ldots$$

Składnik postaci $a^{n-k}b^k$ powstaje, gdy z k nawiasów wybieramy b, z pozostałych a. Wiemy, że można to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Takie więc współczynniki należy wstawić w miejsce znaków zapytania.

Zadania

1. Mały Arturek ma pięć par butów. Wkładając buty kieruje się dwiema zasadami: nigdy nie wkłada lewego buta na lewą nogę, ani prawego na prawą; nigdy nie wkłada dwu butów z tej samej pary. Na ile sposobów może obuć obie nogi?

2. Ile różnych par tanecznych można utworzyć z 10 dziewcząt i 10 chłopców?

3. Na ile sposobów można przyznać trzy medale (złoty, srebrny i brązowy) 10 zawodnikom?

4. Na ile sposobów można wybrać 13 kart spośród 52? Korzystając z programu Wolfram Alpha® oblicz tę liczbę za pomocą instrukcji

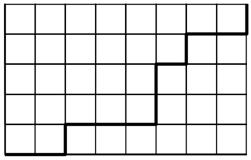
52choose13

5. Z ilu domin składa się komplet, zawierający po jednym dominie dla każdej kombinacji oczek od 0 do 6?

6. Na ile sposobów można spośród 6 dziewcząt i 6 chłopców wybrać delegację:
a) złożoną z dwu dziewcząt i trzech chłopców;
b) złożoną z tej samej liczby dziewcząt co chłopców?

7. Ile trójkątów wyznacza:
a) 12 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe;
b) 12 punktów, spośród których 6 leży na prostej, a poza tym żadne trzy nie są współliniowe?

8. Na ile sposobów można przejść od lewego dolnego wierzchołka kraty 5×8 do prawego górnego poruszając się po kracie zawsze w górę bądź w prawo?



♢ ♢ ♢

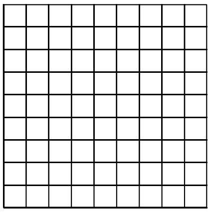
9. Na ile sposobów można rozmieścić 8 wież na szachownicy tak, aby żadna z nich nie znajdowała się w polu bicia drugiej, przy założeniu, że wieże są: a) jednakowe; b) rozróżnialne.

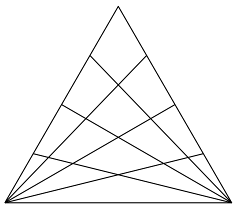
10. Na ile sposób można rozmieścić n osób przy okrągłym stole, jeżeli istotne jest:
a) kto siedzi na którym miejscu;
b) tylko kogo ma się po prawej a kogo po lewej stronie;
c) tylko pomiędzy kim a kim się siedzi?

11. Na ile sposobów można ułożyć k różnych książek na n półkach?

12. Wykaż, że iloczyn k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez $k!$.

13. Ile jest prostokątów na rysunku poniżej (z lewej strony)?





14. Ile jest trójkątów na rysunku powyżej (z prawej strony)? Jaka będzie odpowiedź, gdy z obu dolnych wierzchołków wychodzić będzie po n linii zamiast 5?

1.2 Ciągi skończone i kombinacje z powtórzeniami

Ciągi skończone - Kombinacje z powtórzeniami albo rozmieszczenia - Zadania

W pierwszej części wykładu nie dopuszczaliśmy powtórzeń. Teraz rozważać będziemy analogiczne struktury, w których elementy mogą się powtarzać: ciągi skończone (zwane też wariacjami z powtórzeniami) i kombinacje z powtórzeniami.

Ciągi skończone

Spójrzmy, ile jest ciągów długości k o wyrazach ze zbioru m-elementowego. Oto dla przykładu wszystkie 3-elementowe permutacje o wyrazach 0, 1:

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111.$$

W ogólnym przypadku na pierwszym miejscu mamy m możliwości (bo tyle jest możliwych wyborów), na drugim też $m, \ldots$, na k-tym też m możliwości. Zachodzi zatem następujące:

TWIERDZENIE 1.4 *Wszystkich ciągów długości k o wyrazach ze zbioru m-elementowego jest m^k.*

Szczególnie ważnym wnioskiem jest poniższe:

TWIERDZENIE 1.5 *Zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.*

DOWÓD: Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Wówczas każdy podzbiór $A \subset X$ można w pełni scharakteryzować ciągiem zerojedynkowym długości n. Na i-tym miejscu dajemy 1, gdy $x_i \in A$, a 0 w przeciwnym przypadku.

Na przykład dla $X = \{1, 2, 3\}$ odpowiednie ciągi wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset & \longrightarrow & 000 \\
\{1\} & \longrightarrow & 100 \\
\{2\} & \longrightarrow & 010 \\
\{3\} & \longrightarrow & 001
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\{1,2\} & \longrightarrow & 110 \\
\{1,3\} & \longrightarrow & 101 \\
\{2,3\} & \longrightarrow & 011 \\
\{1,2,3\} & \longrightarrow & 111
\end{array}$$

Tak więc istnieje jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy podzbiorami zbioru n-elementowego, a ciągami zerojedynkowymi długości n. Pozostaje zauważyć, że ciągów takich jest 2^n gdyż na każdym miejscu są dwie możliwości: 0 albo 1.

Kombinacje z powtórzeniami albo rozmieszczenia

W zadaniach o kombinacjach zakładaliśmy, że każdy obiekt można wybrać tylko raz. Rozważmy teraz pokrewne zadanie o **kombinacjach z powtórzeniami**:

Na ile sposobów można wybrać k elementów spośród n (rodzajów) obiektów, przyjmując, że dopuszczamy powtórzenia?

Każdą taką kombinację możemy zakodować w postaci serii kółek i kresek, gdzie kółka odpowiadają wybieranym elementom, a kreski — przegródkom oddzielającym obiekty pierwszego rodzaju, drugiego rodzaju itd. Ustalmy dla przykładu $n = 3$, $k = 10$. Przedstawiony poniżej kod odpowiada wybraniu 3 obiektów pierwszego rodzaju, 5 — drugiego i 2 trzeciego.

$$\circ\ \circ\ \circ \mid\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid\ \circ\ \circ$$

Zauważmy, że każdy układ dwu kresek i 10 kółek jednoznacznie koduje pewną kombinację z powtórzeniami. Na przykład

$$\mid\ \mid\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

odpowiada wyborowi 10 obiektów trzeciego rodzaju.

Układów złożonych z 10 kółek i 2 kresek jest $\binom{2+10}{10}$, gdyż ustalenie, na których 10 pozycjach spośród 12 umieszczone są kółka w pełni określa cały kod. Ogólnie:

TWIERDZENIE 1.6 *Liczba kombinacji z powtórzeniami k elementów spośród n rodzajów jest równa*

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Zauważmy jeszcze, że kombinacje z powtórzeniami można interpretować jako *rozmieszczenia*. Powyższy wzór mówi wówczas, na ile sposobów k jednakowych przedmiotów można rozłożyć do n szuflad. To $n-1$ we wzorze pokazuje wówczas liczbę ścianek pomiędzy szufladami.

Jeśli we współczynniku Newtona dopuścimy ujemne „liczniki”, to wzór ten można zapisać w postaci niemal identycznej ze wzorem na liczbę kombinacji bez powtórzeń. Wystarczą dwa proste przekształcenia:

$$\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots(n+1)n}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-(k-2))(-n-(k-1))}{k!} = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

Zadania

15. Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje: a) zero; b) jedynka?

16. Przyjmijmy, że kod PIN może być dowolnym układem czterech cyfr.
a) Ile jest wszystkich PIN-ów?
b) Ile jest takich, w których jakaś cyfra się powtarza?

17. Ile jest wielomianów stopnia n o współczynnikach: a) 0 i 1; b) 0, 1 i 2.

18. Palindromem nazywamy słowo, które czyta się tak samo od początku i od końca, np. *kajak*. Ile jest palindromów 9-literowych, jeśli alfabet składa się z 26 liter? A ile 8-literowych?

19. Rozważmy wszystkie ciągi długości $n \geqslant 4$ o wyrazach A, T, G oraz C. Ile jest:
a) wszystkich takich ciągów;
b) takich ciągów, w których żadna litera nie występuje dwa razy pod rząd;
c) takich ciągów, że wśród każdych kolejnych czterech występuje każda z czterech liter?

20. Ile słów można utworzyć przestawiając litery słowa: a) ANAGRAM; b) TRATATATA?

21. Ile rozwiązań ma równanie $t + x + y + z = 10$:
a) w liczbach całkowitych nieujemnych;
b) w liczbach całkowitych dodatnich?

22. Na ile sposobów 10 różnych przedmiotów można podzielić pomiędzy dwie osoby tak, aby każda dostała przynajmniej jeden?

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

23. W grze *kółko i krzyżyk* rozpoczynający grę teoretycznie może wygrać po pięciu ruchach. Ile jest takich rozgrywek?

24. Na ile sposobów można przejść po kracie 10×3 poruszając się w górę lub w prawo? Wywnioskuj stąd, na ile sposobów 10 jednakowych cukierków można podzielić pomiędzy trójkę dzieci. Dopuszczamy także podziały, w których część spośród dzieci nic nie dostanie.

25. Tata-matematyk zamierza kupić synowi lokomotywę i kilka różnych wagoników. Chciałby, aby syn miał przynajmniej miliard sposobów ułożenia zestawu. Zakłada, że lokomotywa zawsze stoi na początku, ale pozostałe wagoniki można dowolnie wybierać i w dowolnej kolejności ustawiać. Jaka minimalna liczba wagoników zapewni oczekiwany miliard ułożeń? Korzystając z liczby e możesz znaleźć odpowiedź bez uciążliwych rachunków.

26.* W grze w kółko i krzyżyk rozgrywanej na „planszy” 3×3, trzy pola leżące na jednej linii można wybrać na 8 sposobów — 3 linie poziome, 3 pionowe i 2 przekątne. A ile jest takich trójek w trójwymiarowej grze $3 \times 3 \times 3$?

1.3 Teoria liczb, gry i geometria

Zadanie o liczbie dzielników - Zadanie o podziale i uogólnione współczynniki Newtona - Zadanie o podziale płaszczyzny - Zadania

Formalne pytania o liczbę ustawień, wyborów czy słów, itd. mogą wydawać się nienaturalne. Mało kto stawia sobie w życiu takie pytania. Pokażemy teraz, jak te abstrakcyjne metody pozwalają rozwiązywać ciekawsze problemy.

Zadanie o liczbie dzielników

Przykład 1.2 Ile dzielników ma liczba postaci $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, gdzie p_i to różne liczby pierwsze?

Rozwiązanie: Zauważmy, że każdy dzielnik takiej liczby ma postać $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, gdzie $\beta_i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i$. Ponieważ każde β_i przyjmuje $\alpha_i + 1$ wartości, więc wszystkich dzielników jest

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

Na przykład liczba $500 = 2^2 \cdot 5^3$ ma $(2 + 1) \cdot (3 + 1) = 12$ dzielników:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 2 & 10 & 50 & 250 \\ 4 & 20 & 100 & 500. \end{array}$$

Zadanie o podziale i uogólnione współczynniki Newtona

Przykład 1.3 Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy czterech graczy, każdemu po 13 kart?

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. Pierwszy jest pewnie na obecnym etapie łatwiejszy, ale drugi szybciej daje symetryczny wynik.

Rozwiązanie:

Metoda I. Mamy obliczyć, na ile sposobów można 52 karty podzielić po równo pomiędzy czterech graczy. Zauważmy, że sama *technika* rozdawania nie ma wpływu na liczbę możliwych rozdań. Wyobraźmy sobie, że karty rozdajemy w ten sposób, że najpierw dajemy 13 kart spośród wszystkich 52 pierwszemu graczowi, następnie 13 spośród pozostałych 39 kart drugiemu graczowi itd.

Takich rozdań jest

$$\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13} = \frac{52!}{13!\,39!} \cdot \frac{39!}{13!\,26!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} \cdot \frac{13!}{13!\,0!} = \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}.$$

Metoda II. Zastanówmy się, ile jest permutacji odpowiadających konkretnemu rozdaniu. Jasne jest, że permutacja, która przestawia pierwsze 13 kart, drugie 13 kart itd. zmienia tylko kolejność, w jakiej gracze otrzymają karty, ale z punktu widzenia graczy są to permutacje *równoważne*. Permutacji takich jest

$13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!$. Skoro wszystkich permutacji jest $52!$, a każde rozdanie może być otrzymane na $13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!$ sposobów, to różnych rozdań jest

$$\frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}.$$

Podobne wyniki pojawiają się w wielu zadaniach. Dlatego warto mieć specjalne oznaczenie. Załóżmy, że $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$. **Uogólnionym współczynnikiem Newtona** nazywamy wyrażenie

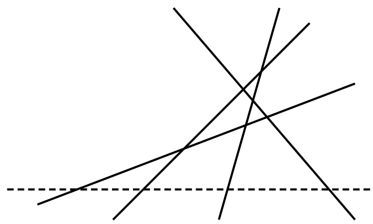
$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_i} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots\,k_i!}.$$

W szczególności

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k}.$$

Zadanie o podziale płaszczyzny

Przykład 1.4 Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n prostych w położeniu ogólnym (tzn. żadne dwie z nich nie są równoległe, a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie)?



Rozwiązanie: Można założyć — ewentualnie obracając cały układ — iż żadna z rozważanych prostych nie jest pozioma. W takim przypadku każdy z obszarów ograniczonych z dołu ma dokładnie jeden punkt najniższy. Obszarów takich jest dokładnie tyle, ile punktów przecięcia prostych, czyli $\binom{n}{2}$.

Poprowadźmy prostą poziomą leżącą poniżej wszystkich punktów przecięcia (na rysunku linia przerywana). Pominięte obszary (nieograniczone od dołu) wyznaczają na dodanej prostej odcinki. Ponieważ n prostych wyznacza na tej prostej $n + 1$ odcinków, więc tyle jest obszarów nieograniczonych. Łącznie wszystkich obszarów jest zatem

$$\binom{n}{2} + n + 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Metodę tę (i elegancki wynik) łatwo przenieść na wyższe wymiary.

Zadania

27. Ile różnych dzielników ma liczba: a) 2^6; b) 10^6; c) $10!$?

28. Liczbę wszystkich rozdań 52 kart pomiędzy czterech graczy wyraziliśmy za pomocą współczynników Newtona. Korzystając z programu Wolfram Alpha® znajdź dokładny wynik i oszacuj rząd wielkości tej liczby.

29. Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy czterech graczy tak, aby:
a) każdy miał jednego asa, jednego króla, ..., jedną dwójkę;
b) któryś z nich miał wszystkie cztery asy?

♢ ♢ ♢

30. Za pomocą uogólnionych współczynników newtonowskich można zapisać wzór Newtona dla większej liczby składników. Dla trzech składników otrzymamy

$$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} a^i b^j c^k.$$

Podobnie dla większej liczby składników.
a) Podaj końcową postać wzoru na $(a+b+c)^3$.
b) Ile składników występuje w rozwinięciu $(a+b+c+d)^n$?
c) Znajdź sumę wszystkich współczynników w rozwinięciu z punktu b).

31. Na ile części dzieli przestrzeń n płaszczyzn w położeniu ogólnym?

32.* Komplet do gry SET[1] składa się z 81 różnych kart. Niektóre układy trzech kart zwane są *setami*. Można wykazać, że każdy układ dwu kart da się uzupełnić do *seta* dokładnie na jeden sposób. Kolejność kart nie jest istotna.
a) Znajdź liczbę wszystkich *setów*.
b) Ile średnio *setów* zawiera układ 12 kart?
c) Wykaż, że przy każdym podziale wszystkich 81 kart na dwie części przynajmniej jedna z nich zawiera *seta*.
d)* Pokaż, że każdy układ 37 kart zawiera *seta*.

[1]Zadanie zyska na motywacji, gdy spróbujesz rozwiązać jakąś zagadkę ze strony www.setgame.com. Tam też Czytelnik znajdzie kilka matematycznie ambitniejszych artykułów na temat tej gry.

Wykład 2

Współczynniki Newtona

Współczynniki Newtona są obok silni najważniejszymi funkcjami kombinatorycznymi. W kolejnych wykładach zobaczymy, że niemal wszystkie inne istotne funkcje kombinatoryczne wyrażają się za ich pomocą.

2.1 Współczynniki Newtona i trójkąt Pascala

Trójkąt Pascala - Tożsamość Pascala - Zadania

Przyglądając się kolejnym wierszom trójkąta Pascala bez trudu odkryjemy, że suma wyrazów w $(n+1)$-szym wierszu jest równa 2^n. A czy potrafisz znaleźć wzór na sumę ich kwadratów?

Trójkąt Pascala

Znany był on już w XI w. lub niewiele później w Chinach, Indiach i krajach Islamu.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Wiersze tego trójkąta pokazują kolejne współczynniki Newtona $\binom{n}{k}$ odpowiednio dla $n = 0$, $n = 1$ itd.

W trójkącie Pascala wyrazy skrajne są równe 1, pozostałe powstają przez dodanie dwu wyrazów sąsiednich z poprzedniego wiersza. Zauważmy, że w każdym wierszu współczynniki Newtona rosną do połowy wiersza, a dalej maleją (p. zad. 3).

Tożsamość Pascala

Trójkąt Pascala opiera się na tożsamości

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

zwanej dalej **tożsamością Pascala**. Można ją łatwo wykazać za pomocą bezpośrednich rachunków. Poniższy dowód kombinatoryczny pozwala rachunków uniknąć. Sprowadza się on do porównania wyników, jakie otrzymujemy rozwiązując na dwa sposoby poniższe zadanie:

Na ile sposobów można wybrać $k + 1$ *różnych liczb spośród liczb 0, 1, 2, ..., n?*

Wiemy, że takich sposobów jest $\binom{n+1}{k+1}$. Policzmy to inaczej: osobno kombinacje zawierające zero, a osobno te, które zera nie zawierają.

Kombinacji pierwszego typu jest $\binom{n}{k}$, kombinacji drugiego typu $\binom{n}{k+1}$. W sumie otrzymujemy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Pozostaje zauważyć, że obie metody muszą dać ten sam wynik.

Zadania

1. Wyznacz największy spośród współczynników Newtona postaci $\binom{10}{k}$.

2. Poniższe liczby ustaw w kolejności od największej do najmniejszej:

$$\binom{77}{37}, \quad \binom{77}{47}, \quad \binom{77}{57}, \quad \binom{77}{67}, \quad \binom{97}{37}, \quad \binom{99}{47}.$$

3. Obliczając iloraz $\binom{n}{k+1}/\binom{n}{k}$ pokaż, że współczynniki Newtona w n-tym wierszu rosną do połowy wiersza (dokładniej: póki $2k + 1 \leqslant n$), a potem maleją.

♢ ♢ ♢

4. Korzystając z tożsamości Pascala przedstaw poniższe sumy w postaci pojedynczego współczynnika Newtona.

a) $\binom{12}{4} + \binom{12}{7}$; b) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4}$.

5. Korzystając ze wzoru Stirlinga wykaż, że zachodzi asymptotyczna równość

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

6. Udowodnij tożsamość Pascala metodą algebraiczną.

7. Na ile sposobów można pokonać drogę pomiędzy skrajnymi punktami kraty $(n-k)$ na $(k+1)$ poruszając się tylko w górę i na prawo? Rozważ osobno drogi zaczynające się od kroku w górę, osobno — od kroku w prawo i wywnioskuj stąd tożsamość Pascala.

2.2 Tożsamości kombinatoryczne

Sumowanie współczynników Newtona - Trzy metody - Jeszcze jedna tożsamość - Tożsamości kombinatoryczne i liczby zespolone - Zadania

Tożsamości kombinatoryczne często pozwalają zastąpić dłuższą sumę krótkim wyrażeniem. Niektóre z tożsamości wykorzystamy już w tym wykładzie, niektóre okażą się przydatne dopiero w rachunku prawdopodobieństwa. Jednak wykład ten warto prześledzić do końca, gdyż same metody są czasem dość zaskakujące. W szczególności skorzystamy z pochodnych i liczb zespolonych.

Sumowanie współczynników Newtona

W analizie wzór Newtona pozwala zastąpić wyrażenie $(a+b)^n$ sumą prostszych składników. W kombinatoryce wzór Newtona często stosujemy w odwrotna stronę — sumę prostych składników zastępujemy potęgą $(a+b)^n$. Na przykład

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

W szczególności dla $x = 1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Tak więc suma wyrazów dowolnego wiersza w trójkącie Pascala jest potęgą dwójki.

Podobnie dla $x = -1$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Przenosząc ujemne składniki na prawą stronę otrzymujemy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots$$

Wynika stąd, że podzbiorów liczebności parzystej jest tyle samo co nieparzystej. Dla zbiorów o nieparzystej liczbie elementów jest to oczywiste. Dlaczego?

Trzy metody

Porównamy teraz trzy metody wyprowadzania tożsamości kombinatorycznych: algebraiczną, kombinatoryczną i analityczną.

Przykład 2.1 Wyprowadź tożsamość

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + k\binom{n}{k} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

I. Metoda algebraiczna:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k![n-(k+1)]!} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k![(n-1)-k]!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

II. Metoda kombinatoryczna:

Rozwiążmy dwiema metodami zadanie: *Na ile sposobów można wybrać spośród n osób komisję wraz z jej przewodniczącym, jeśli dopuszczamy również komisje jednoosobowe?*

Można najpierw wybrać przewodniczącego na n sposobów, po czym dokooptować pewną liczbę członków komisji na 2^{n-1} sposobów, co daje prawą stronę tożsamości. Albo najpierw wybrać k-osobową ($k \geqslant 1$) komisję — możemy to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów, po czym jednego z jej członków uczynić przewodniczącym, co daje lewą stronę.

III. Metoda analityczna:
Ze wzoru Newtona wynika, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Zróżniczkujmy tę równość stronami. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Sumowanie zaczyna się teraz od $k = 1$, ponieważ pochodna stałej jest równa zeru. Podstawiając $x = 1$ otrzymujemy żądaną tożsamość.

Jeszcze jedna tożsamość

Wiemy już, że przy ustalonym n suma współczynników Newtona $\binom{n}{k}$ jest równa 2^n. Również suma kwadratów tych współczynników wyraża się bardzo prostym wzorem:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{k}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Aby wykazać tę tożsamość rozwiążemy na dwa sposoby następujące zadanie: *Jacek i Placek mają po n znaczków. Na ile sposobów mogą wymienić się znaczkami, przy założeniu, że znaczki wymieniają jeden za jeden*?

Oczywiście, jak to u matematyków jest w zwyczaju, dopuszczamy też *wymianę pustą* — zero znaczków na zero znaczków.

Każdą taką wymianę można przeprowadzić w ten sposób, że wszystkie znaczki łączymy w jedną kolekcję, po czym Jacek dostaje n znaczków, a Placek resztę. Można to zrobić na

$$\binom{2n}{n}$$

sposobów. Ale można postępować inaczej. Jacek i Placek wybierają po k znaczków i dokonują ich wymiany. Mogą to zrobić na

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$$

sposobów. Ponieważ k może przyjmować wartości od 0 do n, więc łącznie liczba tych sposobów wyraża się sumą po lewej stronie wzoru.

Tożsamości kombinatoryczne i liczby zespolone*

Na zakończenie wyprowadzimy jeszcze jedną, niezbyt użyteczną, ale dość tajemniczą tożsamość. Pokażemy, że

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=2^{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Lektura dowodu wymaga znajomości wzoru de Moivre'a.

Sumowanie współczynników parzystych opierało się na wykorzystaniu wzoru Newtona dla $(1+1)^n$ oraz $(1-1)^n$. To drugie wyrażenie można zapisać w postaci $(1+(-1))^n$, a wówczas widać, że korzystaliśmy tu ze wzoru Newtona dla $(1+x)^n$ podstawiając w miejsce x dwa pierwiastki drugiego stopnia z 1. Nasuwa się zatem myśl, aby teraz wykorzystać ten sam wzór dla pierwiastków czwartego stopnia.

Rozważmy cztery równości:

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\ldots\\
(1-1)^n &= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots\\
(1+i)^n &= \binom{n}{0}+i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}-i\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\ldots\\
(1-i)^n &= \binom{n}{0}-i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+i\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots
\end{aligned}$$

Dodajmy te cztery równości stronami. Zauważmy, że znikną wszystkie kolumny, oprócz tych, które odpowiadają krotnościom czwórki. Zatem

$$4\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots\right]=2^n+(1+i)^n+(1-i)^n.$$

Na mocy wzoru de Moivre'a

$$\mathrm{Re}\,(1+i)^n=\mathrm{Re}\left[\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Łatwo sprawdzić, że $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\,z$. Tak więc

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{2^n+(1+i)^n+(1-i)^n}{4}=$$

$$=2^{n-2}+\frac{2\mathrm{Re}\,(1+i)^n}{4}=2^{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Zadania

8. Oblicz:

a) $\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}$; b) $\binom{101}{1}+\binom{101}{3}+\binom{101}{5}+\ldots+\binom{101}{101}$.

Wsk. Porównaj z sumą, jaką trzeba dodać, aby otrzymać sumę pełnego wiersza w trójkącie Pascala.

9. Korzystając ze wzoru Newtona dla $(1+x)^n$ uprość sumę:

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+\ldots+2^n\binom{n}{n}.$$

10. Wykaż tożsamość

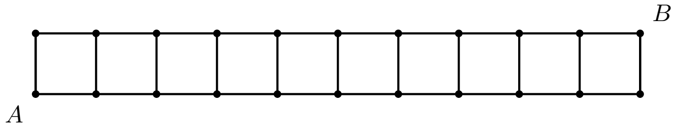
$$2\cdot 1\cdot\binom{n}{2}+3\cdot 2\cdot\binom{n}{3}+\ldots+(n-1)(n-2)\binom{n}{n-1}+n(n-1)\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}.$$

11. Rozwiąż na dwa sposoby zadanie: *Na ile sposobów można wybrać k osobową komisję spośród m mężczyzn i n niewiast*[1] *?* Wywnioskuj stąd **tożsamość Vandermonde'a**

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{k}.$$

Wyprowadź z niej wzór na sumę kwadratów współczynników Newtona (str. 21)

12. Rysunek poniżej przedstawia sieć dróg łączących miasta A oraz B. Na ile sposobów możesz dotrzeć z miasta A do B nie odwiedzając żadnego miasta dwukrotnie, jeżeli jesteś:
a) człowiekiem interesu, a więc wybierasz drogę najkrótszą;
b) komiwojażerem, a więc chcesz odwiedzić po drodze wszystkie miasta;
c)* turystą, a więc możesz wybrać drogę dowolną.



◇ ◇ ◇

13. Udowodnij tożsamość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

Wyprowadź z tej tożsamości wzór na sumę kwadratów.
Wsk. Rozwiąż na dwa sposoby zadanie: *Na ile sposobów można wybrać trzy rozdziały z książki mającej ich $n+1$?*

[1] Ten delikatny archaizm pozwala dopasować treść zadania do zmiennych występujących w tożsamości.

14. Wykaż tożsamość algebraicznie i kombinatorycznie

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}.$$

15. Udowodnij, że dla $n \geqslant k \geqslant i$ zachodzi tzw. **tożsamość podkomisji**

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

16.* Sprawdź, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sformułuj hipotezę ogólną i wykaż jej prawdziwość.

17.* Wykaż, że każde dwa wyrazy (oprócz skrajnych) tego samego wiersza w trójkącie Pascala mają wspólny dzielnik większy od 1.

18.* Znajdź wzór na sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$$

2.3 Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) francuski matematyk, fizyk i myśliciel religijny. Podstawowe wykształcenie matematyczne zapewnił mu ojciec Étienne Pascal (krzywa znana jako *ślimak Pascala* jest odkryciem ojca). Mając lat 17 dokonał pierwszego ważnego odkrycia w geometrii rzutowej. Niedługo potem, aby pomóc ojcu w żmudnych obliczeniach rachunkowych zbudował w latach 1642-44 pierwszą maszynę liczącą, która dodawała i odejmowała (maszynę zdolną wykonywać cztery działania zbudował dopiero Leibniz). W roku 1654 ukończył *Traktat o trójkącie arytmetycznym*, w którym wyłożone są teoretyczne podstawy trójkąta związanego z jego nazwiskiem. Pojawia się tam także — zdaniem niektórych historyków po raz pierwszy w sposób jawny — zasada indukcji matematycznej. Jego korespondencja z Fermatem uważana jest za moment narodzin rachunku prawdopodobieństwa. Wymieniany jest też jako jeden z ważnych prekursorów rachunku różniczkowego.

Pascal zajmował się także intensywnie eksperymentami związanymi z ciśnieniem atmosferycznym i kwestią istnienia próżni. A jako myśliciel religijny i autor *Myśli* i *Prowincjałek* uchodzi za jedną z czołowych postaci w dziejach francuskiej prozy.