MATEMATYKA OLIMPIJSKA

⋆ ⋆

Planimetria

Beata Bogdańska *Adam Neugebauer*

CZERWIEC 2018

Opracowanie graficzne: *Autorzy*

Wydanie I

ISBN: 978-83-7267-711-2

Wydawnictwo Szkolne OMEGA, 30–552 Kraków, ul. Wielicka 44 C
tel. 12 4 256 256; +48 662 152 899
www.ws-omega.com.pl e-mail: biuro@ws-omega.com.pl

Przedmowa

Przedstawiamy pierwsze całościowe chociaż nieostateczne[1] wydanie serii podręczników pod wspólnym tytułem MATEMATYKA OLIMPIJSKA. Mamy tu na myśli matematykę elementarną w zakresie wyznaczonym przez zadania OM (krajowe i międzynarodowe). Matematyka ta, mimo niewielkiego obciążenia definicyjnego, jest bliższa matematyce *akademickiej* niż matematyce *szkolnej*. Proponowany sposób wykładu (definicja, twierdzenie, przykłady, zadania i ćwiczenia[2]) jest więc bliższy akademickiemu niż szkolnemu. Szczegółowy spis treści powinien dawać dostatecznie dobre wyobrażenie o terytorium zajmowanym przez Matematykę Olimpijską w królestwie matematyki. Każdy tom kończy się krótką bibliografią, w której pokazujemy kilka źródeł dających możliwość rozszerzenia i pogłębienia przedmiotowej wiedzy. W indeksie zamieszczamy również terminy zaledwie wspomniane w tekście. Powinno to rozbudzać ciekawość Czytelników i zachęcać do samodzielnych poszukiwań w literaturze. Znak $\Diamond$ oznacza koniec rozwiązania zadania lub koniec przykładu, a znak $\Box$ – koniec dowodu (lub tylko sformułowania) twierdzenia. Czasami zamiast *wtedy i tylko wtedy, gdy* piszemy iff (ang. *if and only if*), a zamiast *bez straty ogólności* piszemy b.s.o. Napis $\xi := \zeta$ oznacza: *ξ jest z definicji (z określenia) równe ζ.*

Poszczególne części *żółtego*, *zielonego* i *czerwonego* skryptów były wielokrotnie w latach 2007-2017 wydawane jako preprinty w niewielkich nakładach. Znalazły one pewne uznanie w oczach niektórych nauczycieli zajmujących się kształceniem uczniów-olimpijczyków. W szczególności, dr Jacek Dymel (Kraków), opiekun naukowy i wychowawca licznych laureatów OM i MOM, zachęcił nas do przygotowania niniejszego wydania.

Serdeczne podziękowania składamy profesorowi Andrzejowi Schinzlowi za aprobatę naszej wizji teorioliczbowej części przedsięwzięcia (pozostałe części wzorują się na niej) i wskazanie błędów. Kolega Wojtek Wawrów wskazał nam niepoliczalny zbiór usterek i błędów w poprzednich wersjach trzech części, a także kilka propozycji ulepszenia tych części. Zasłużył tym na naszą bezgraniczną wdzięczność. Nasi uczniowie (i koledzy jednego z nas) Marcin Michorzewski, Paweł Poczobut i Krzysztof Małysa w różnych okresach powstawania serii byli bardzo pomocni. Dziękujemy im za to.

APEL. Mimo licznych wysiłków, w książkach z pewnością pozostało jeszcze sporo do poprawienia. Wobec tego zwracamy się do Was, drodzy Czytelnicy, z gorącym apelem o krytyczne czytanie i informowanie o zauważonych błędach i innych niedostatkach zarówno merytorycznych jak i dydaktycznych (adres: **koloroweskrypty** @ **gmail.com**). Bylibyśmy bardzo wdzięczni za wzięcie sobie do serca tego apelu. Nasze reakcje na Wasze uwagi zamieszczamy na stronie **sites.google.com/site/koloroweskrypty**.

Autorzy

[1] Mamy nadzieję na napisanie *Kolorowego suplementu*, w którym znajdą się brakujące na razie fragmenty.

[2] Użyte przykłady, zadania i ćwiczenia, poza trywialnymi, nie są oryginalne. Pochodzą z rozmaitych źródeł, głównie z zawodów i olimpiad matematycznych. Wyjątkowo tylko wskazujemy z jakich.

Słowo wstępne do tomu

[...] I ja astronomiji słuchałem dwa lata
W Wilnie, gdzie Puzynina, mądra i bogata
Pani, oddała dochód z wioski dwiestu chłopów
Na zakupienie różnych szkieł i teleskopów.

T o m d r u g i ($\mathbb{PLA}$ – *zielony*) poświęcony jest podstawowym pojęciom i metodom elementarnej *Planimetrii Euklidesowej.* Jest w zasadzie samowystarczalny. Jest też z całej serii najbliższy matematyce *szkolnej.* Nie ma (i nie chce mieć) charakteru aksjomatyczno-dedukcyjnego. Przytoczone aksjomaty mają tylko przypominać Czytelnikowi o c z y w i s t ą wiedzę. Reszta stara się dochować rzetelności matematycznej na poziomie mniej więcej wymaganym na OM.

Pierwszy rozdział zawiera materiał poziomu gimnazjalnego – pretalesowskiego. Twierdzenie Talesa i, opierająca się na nim teoria podobieństwa, jest głównym tematem rozdziału drugiego, Rozdział ten kończy się wstępem do trygonometrii. W rozdziale trzecim uczymy się o współliniowości i współpękowości. Zaczynamy się też w nim myśleć *rzutowo.* Mówimy tam również o jednokładności, inwersji względem okręgu i odpowiedniości biegunowej. Rozdział czwarty poświęcony jest (innym) przekształceniom geometrycznym. W rozdziale piątym mówimy (raczej syntetycznie) o stożkowych.

Chemicy, nazywając niektóre pierwiastki chemiczne, używają nazwisk wielkich uczonych: *einstein* (la.99), *rutherford* (la.104), *bohr* (la.107), itp. Naśladując to, nazywamy okazjonalnie *pitagorasem*, *talesem*, *menelaosem*, *cevą*, *desargues'em*, *pascalem* czy *brianchonem*, odpowiednie p i e r w i a s t k i rozumowań geometrycznych.

Mamy nadzieję, że Czytelnik od razu zorientował się, że użyliśmy cytatów z *Pana Tadeusza* jako mott do naszych rozdziałów (i przedmowy). W strukturze formalnej mickiewiczowskiego trzynastozgłoskowca również dostrzegamy p i e r w i a s t k i geometryczne.

Książka zawiera około 70 zadań z rozwiązaniami (zadania dobrze jest – przed przeczytaniem zamieszczonego rozwiązania – próbować rozwiązać samodzielnie!), około 600 ćwiczeń do rozwiązania przez Czytelnika i około 115 udowodnionych twierdzeń (warto również próbować znajdować własne dowody!). Więcej zadań znaleźć można w specjalnych zbiorach zadań, zobacz na przykład [**14**] (dla kursu wstępnego), czy [**17**], [**18**] (dla całokształtu).

Życzymy owocnej lektury.

Tabliczka chronologiczna

Tales z Miletu	(627 p.n.e. - 548 p.n.e.)
Pitagoras z Samos	(ok. 580 p.n.e. - ok. 500 p.n.e.)
Euklides z Aleksandrii	(ok. 365 p.n.e. - ok. 300 p.n.e.)
Archimedes z Syrakuz	(ok. 287 p.n.e. - 212 p.n.e.)
Apoloniusz z Pergi	(ok. 260 p.n.e. - ok. 190 p.n.e.)
Menelaos z Aleksandrii	(I w n.e.)
Heron z Aleksandrii	(I w n.e.)
Klaudiusz **Ptolemeusz**	(II w n.e.)
Pappus z Aleksandrii	(? - 340 n.e.)
Brahmagupta	(598 - 660)
Galileo **Galilei** (**Galileusz**)	(1564 - 1642)
Gérard **Desargues**	(1593 - 1661)
René **Descartes** (**Kartezjusz**)	(1596 - 1650)
Blaise **Pascal**	(1623 - 1662)
Isaac **Newton**	(1643 - 1727)
Giovanni **Ceva**	(1647 - 1734)
Robert **Simson**	(1687 - 1768)
Leonhard **Euler**	(1707 - 1783)
Mathieu **Stewart**	(1717 - 1785)
Gaspard **Monge**	(1746 - 1818)
Lazare **Carnot**	(1753 - 1823)
Joseph Diaz **Gergonne**	(1771 - 1859)
Charles-Julien **Brianchon**	(1783 - 1864)
Victor **Poncelet**	(1788 - 1867)
Michel **Chasles**	(1793 - 1880)
Jakob **Steiner**	(1796 - 1863)
Adam **Mickiewicz**	(1798 - 1855)
Karl Wilhelm **Feuerbach**	(1800 - 1834)
William **Hamilton**	(1805 - 1865)
Heinrich von **Nagel**	(1821 - 1903)

W matematyce, w geometrii w szczególności, używamy alfabetu greckiego. Jego znajomość jest, oczywiście, niezbędna.

Alfabet grecki[3]

kształt	Kształt	nazwa	wymowa
α		*alfa*	a
β		*beta*	b
γ	$\varGamma$	*gamma*	g
δ	$\varDelta$	*delta*	d
ε		*epsilon*	ĕ
ζ		*dzeta*	dz, z
η		*eta*	ē
ϑ	$\varTheta$	*teta*	th
ι		*jota*	i
κ		*kappa*	k
λ	$\varLambda$	*lambda*	l
μ		*mi*	m
ν		*ni*	n
ξ	$\varXi$	*ksi*	ks
o		*omikron*	ŏ
π	$\varPi$	*pi*	p
ϱ		*ro*	r
σ	$\varSigma$	*sigma*	s
τ		*tau*	t
υ	$\varUpsilon$	*ypsilon*	y
φ	$\varPhi$	*fi*	f
χ		*chi*	ch
ψ	$\varPsi$	*psi*	ps
ω	$\varOmega$	*omega*	ō

[3] Niewypisane wielkie litery alfabetu greckiego mają taki sam kształt jak (niekoniecznie odpowiadające im fonetycznie) litery łacińskie – dlatego nie są używane w tekstach matematycznych. Jak bowiem mielibyśmy odróżnić A od wielkiej α, czy H od wielkiej η?

Spis treści

Rozdział 1

Planimetria pretalesowska

[...] *Hrabski koń, zwrócony z drogi,*
Prosto kłusował polem aż pod zamku progi.
Hrabia samotny wzdychał, poglądał na mury,
Wyjął papier, ołówek i kreślił figury.

Materiał wyłożony w tym rozdziale i dwóch początkowych paragrafach następnego, odpowiada mniej więcej potrzebom uczestnika Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Przedrostek *pre* w tytule rozdziału służy do wskazania zależności logicznej, a nie czasowej!

1.1 Podstawy

Mamy nadzieję, że wszystkie opisane w tym paragrafie fakty i pojęcia są doskonale znane Czytelnikowi. Zebraliśmy je tu wyłącznie dla ustalenia oznaczeń i dla przyszłych odwołań.

1.1.1 Oznaczenia i definicje podstawowe

Zaczynamy od rozwiązania *wejściówki* (ćwiczenia wstępnego):

Ćwiczenie 1.1 Narysować i przyswoić sobie poniższe pojęcia i ich nazwy:

1. **Punkty** oznaczamy wielkimi, a **proste** małymi literami alfabetu łacińskiego.

2. Zdania: *punkt* J *leży na prostej* k oraz *prosta* k *przechodzi przez punkt* J, mają tę samą treść. Symbolicznie zapisujemy ją (tę treść) tak: $J \in k$.

3. Jedyną prostą przechodzącą przez punkty $A \neq B$ oznaczamy symbolem AB lub l_{AB}. Symbolem h_{AB} oznaczamy **półprostą** o początku A przechodzącą przez B.

4. **Odcinek** o końcach A, B oznaczamy symbolem $\overline{AB}$. **Długość** odcinka $\overline{AB}$ oznaczamy symbolem $|AB|$. **Środkiem** odcinka $\overline{AB}$ jest taki punkt $M \in \overline{AB}$, że $|AM| = |MB|$.

5. Dwie proste k i l nazywamy **równoległymi**, gdy nie mają żadnego punktu wspólnego lub gdy są równe. Oznaczamy to $k \parallel l$. Gdy proste k i l nie są równoległe, piszemy $k \nparallel l$ i symbolem $k \cdot l$ oznaczamy (jedyny) punkt wspólny tych prostych.

6. **Okręgiem** $\mathcal{K}(O, r)$ o **środku** O i **promieniu** r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O równa jest r.

7. **Kołem** $\mathcal{D}(O, r)$ o **środku** O i **promieniu** r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest niewiększa niż r.

8. Dwie półproste o wspólnym początku wraz z jednym z dwóch obszarów, na które te półproste dzielą płaszczyznę, nazywamy **kątem**. Półproste te nazywamy **ramionami** tego kąta, a ich wspólny początek – **wierzchołkiem** kąta. Obszar płaszczyzny, o którym mowa wyżej, nazywamy **wnętrzem** kąta. Kąt nazywamy **zerowym**, gdy ma puste wnętrze, **półpełnym**, gdy jego ramiona są dwiema różnymi półprostymi jednej prostej. Całą płaszczyznę nazywamy kątem **pełnym**. Kąt o ramionach h_{OA} i h_{OB} oznaczamy $\sphericalangle AOB$ (z kontekstu powinno być jasne, który z dwóch kątów mamy na myśli). Dla oznaczenia kątów stosować też będziemy małe litery greckie, np. $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\psi$ itp.

9. Rozważmy okrąg o środku w wierzchołku kąta i niezerowym promieniu. Część tego okręgu leżącą we wnętrzu rozważanego kąta nazywamy **łukiem** okręgu. (Rysując łuk wskazujemy, który z dwóch kątów mamy na myśli.)

10. Kąt o mierze $90°$ nazywamy **kątem prostym**. Kąt o mierze mniejszej niż $90°$ nazywamy **kątem ostrym**, a kąt o mierze z przedziału $(90°, 180°)$ – **kątem rozwartym**.

11. Jeżeli dowolny z czterech kątów utworzonych przez nierównoległe proste k, l jest kątem prostym, to proste takie nazywamy **prostopadłymi**. Zapisujemy to $k \perp l$.

12. **Rzutem** (prostokątnym) punktu P na prostą k nazywamy punkt wspólny prostej k i prostej prostopadłej do k przechodzącej przez P. Wygodnym oznaczeniem jest P_k.

13. **Odległością** punktu P od prostej k nazywamy liczbę $|PP_k|$, gdzie P_k jest rzutem punktu P na prostą k. Oznaczenie: $d(P, k)$.

14. Dwie przecinające się proste wyznaczają dwie pary kątów, których jedynym punktem wspólnym jest punkt przecięcia się tych prostych. Każdą taką parę kątów nazywamy parą **kątów wierzchołkowych**.

15. Dwa kąty o jednym wspólnym ramieniu i pozostałych ramionach będących dopełniającymi się półprostymi tej samej prostej nazywamy parą **kątów przyległych**.

16. Kąt półpełny o obu ramionach na jednej prostej k nazywamy **półpłaszczyzną o brzegu** k.

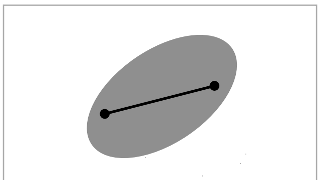
17. Półprostą h_{IC} leżącą wewnątrz danego kąta $\sphericalangle AIB$ taką, że $m(\sphericalangle AIC) = m(\sphericalangle CIB)$, nazywamy **dwusieczną** kąta $\sphericalangle AIB$.

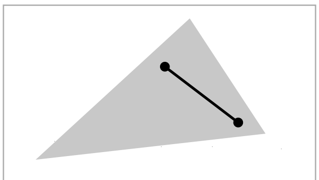
18. Niech A, B, C będą trzema nie leżącymi na jednej prostej punktami. **Trójkątem** ABC nazywamy część wspólną trzech półpłaszczyzn, z których jedna ma brzeg AB i punkt C we wnętrzu, druga ma brzeg BC i punkt A we wnętrzu, a trzecia ma brzeg CA i punkt B we wnętrzu. Punkty A, B, C nazywamy **wierzchołkami** trójkąta ABC, odcinki $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ nazywamy **bokami** tego trójkąta, a kąty $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle CAB$ **kątami trójkąta**. Trójkąt ABC oznaczać będziemy symbolem $\triangle ABC$. Zobacz rysunek 1.3.

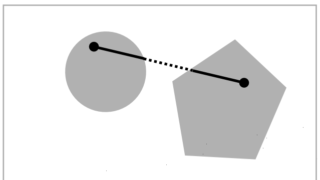
19. Mówimy, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są **przystające**, gdy mają odpowiednie boki równych długości: $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|CA| = |C'A'|$, i odpowiednie kąty równych miar: $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A')$, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle B')$, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle C')$. Zapisujemy to następująco: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. (Pamiętać o kolejności zapisywania wierzchołków!)

20. Podzbiory płaszczyzny nazywamy **figurami geometrycznymi**.

Definicja 1.1 Figurę geometryczną $\mathcal{F}$ nazywamy **figurą wypukłą**, gdy dla dowolnych punktów $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi zawieranie $\overline{AB} \subseteq \mathcal{F}$. Patrz rysunki 1.1$a$ i 1.1b.


Rys. 1.1*a*


Rys. 1.1*b*


Rys. 1.1*c*

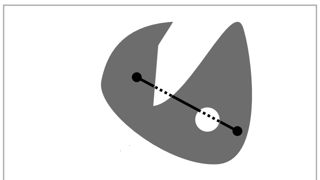
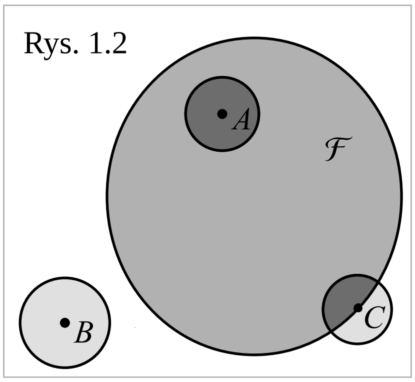

Rys. 1.1*d*

Figura może być figurą niewypukłą nie tylko dlatego, że składa się z kilku „kawałków”, porównaj rysunki 1.1*c* i 1.1*d*.

Wyjaśnimy teraz trzy pojęcia **topologiczne**.



Rys. 1.2

Definicja 1.2 Punkt A jest **punktem wewnętrznym** figury $\mathcal{F}$, gdy istnieje taka (ściśle) dodatnia liczba r, że $\mathcal{D}(A, r) \subseteq \mathcal{F}$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych figury $\mathcal{F}$ nazywa się **wnętrzem** figury $\mathcal{F}$. Punkt B jest **punktem zewnętrznym** figury $\mathcal{F}$, gdy istnieje taka (ściśle) dodatnia liczba r, że $\mathcal{D}(B, r) \cap \mathcal{F} = \varnothing$. C jest **punktem brzegowym** figury $\mathcal{F}$, gdy dla każdej dodatniej liczby r w kole $\mathcal{D}(C, r)$ leżą zarówno punkty figury $\mathcal{F}$ jak i punkty nie należące do figury $\mathcal{F}$. Zbiór punktów brzegowych figury $\mathcal{F}$ nazywa się **brzegiem** figury $\mathcal{F}$.

Wprowadzimy jeszcze oznaczenia konkretnych elementów trójkąta. W dalszym ciągu, gdy mówimy ogólnie o (jednym) trójkącie, oznaczamy go standardowo $\triangle ABC$. Kolejnymi **oznaczeniami standardowymi**, do używania których zachęcamy Czytelnika, są:

(1) Długości boków trójkąta oznaczamy:

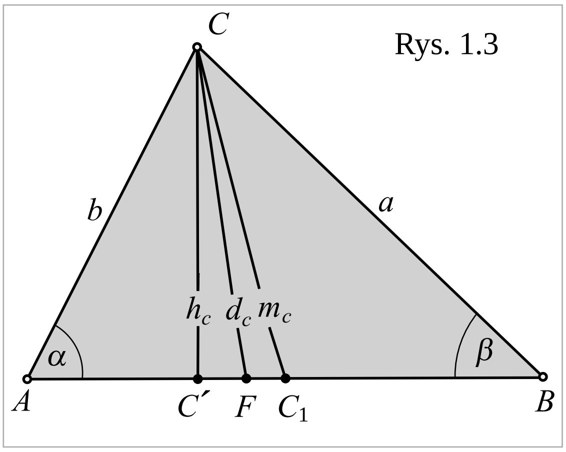
$$\boxed{a = |BC|,\ b = |CA|,\ c = |AB|.}$$

(2) Kąty trójkąta oznaczamy:

$$\boxed{\alpha = \sphericalangle A,\ \beta = \sphericalangle B,\ \gamma = \sphericalangle C.}$$

(3) Miary kątów trójkąta oznaczamy:

$$\boxed{\alpha = m(\sphericalangle A),\ \beta = m(\sphericalangle B),\ \gamma = m(\sphericalangle C).}$$



Rys. 1.3

(4) Odcinek dwusiecznej dowolnego z trzech kątów trójkąta, od wierzchołka do punktu przecięcia z przeciwległym bokiem, nazywamy po prostu **dwusieczną** tego trójkąta. Długość (a także, gdy nie prowadzi to do nieporozumień, samą dwusieczną) dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka A oznaczamy d_a. Analogiczne znaczenie mają oczywiście oznaczenia d_b i d_c.

(5) Odcinek łączący wierzchołek A ze **środkiem** A_1 przeciwległego boku $\overline{BC}$ nazywamy **środkową** trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A. Jego długość oznaczamy m_a. Jasne jest, co oznaczają symbole m_b i m_c. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień, to, podobnie jak w przypadku dwusiecznych, używamy symbolu m_a na oznaczenie samej środkowej.

(6) Rzut C' punktu C na prostą AB nazywa się **spodkiem wysokości** opuszczonej z wierzchołka C. W takiej sytuacji odcinek $\overline{CC'}$ nazywa się **wysokością** opuszczoną z wierzchołka C. Długość tej wysokości oznaczać będziemy w dalszym ciągu h_c. Jasne, że długości wysokości opuszczonych z wierzchołków A i B będziemy oznaczać odpowiednio h_a i h_b.

U w a g a. Pewne (wskazane bądź nie) niekonsekwencje w wyższej wprowadzonych oznaczeniach nie powinny prowadzić do nieporozumień. Inne oznaczenia standardowe **geometrii trójkąta** wprowadzać będziemy stopniowo. Zobacz też spis na stronie 274.

1.1.2 Aksjomaty

Twierdzenia, których prawdziwość uznajemy (za oczywistą), nazywają się **aksjomatami**. Czytelnik powinien uważnie, z ołówkiem w ręce, przeczytać poniższe aksjomaty i przyswoić sobie wszystkie p r a w d y w nich zawarte.

Aksjomat 1 *Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Aksjomat 2 *Każdemu odcinkowi* $\overline{AB}$ *przyporządkowana jest* **długość**, *czyli taka liczba rzeczywista* $|AB| \geqslant 0$, *że spełnione są warunki:*

1. $|AB| = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $A = B$,

2. $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$ *dla dowolnych trzech punktów* A, B, C, *przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* B *jest punktem odcinka* $\overline{AC}$.

Aksjomat 3 *Jeżeli* h_{OP} *jest dowolną półprostą,* r *dowolną liczbą nieujemną, to istnieje dokładnie jeden taki punkt* A *należący do półprostej* h_{OP}, *że* $|OA| = r$.

Aksjomat 4 *Każdemu kątowi* $\sphericalangle\alpha$ *przyporządkowana jest* **miara**, *czyli taka liczba rzeczywista* $m(\sphericalangle\alpha) \in [0, 2\pi]$ *tak, że*

1. *kąt zerowy i tylko on ma miarę równą* 0,

2. *kąt półpełny i tylko on ma miarę równą* π,

3. *jeżeli punkt* C *leży we wnętrzu kąta* $\sphericalangle AOB$, *to* $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle COB)$,

4. *jeżeli liczba* a *spełnia nierówności* $0 < a < m(\sphericalangle AOB)$, *to istnieje dokładnie jedna półprosta* h_{OC} *leżąca we wnętrzu kąta* $\sphericalangle AOB$ *i taka, że* $m(\sphericalangle AOC) = a$.

Aksjomat 5 *Kąty o mierze nie większej niż* π *są figurami wypukłymi.*

Aksjomat 6 *Dla dowolnej prostej* k *i dowolnego punktu* P *istnieje dokładnie jedna taka prosta* l, *że* $P \in l$ *i* $l || k$.

Aksjomat 7 *Dla dowolnej prostej* k *i dowolnego punktu* P *istnieje dokładnie jedna taka prosta* l, *że* $P \in l$ *i* $l \perp k$.

Aksjomat 8 *Jeżeli* $l || k$ *i* $l \perp m$, *to* $k \perp m$.

Aksjomat 9 *Jeżeli* $P, R \in m$ *i* $k || m$, *to* $d(P, k) = d(R, k)$.

Aksjomat 10 (***Cecha przystawania BKB***) *Jeżeli dla trójkątów* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A'B'C'$ *zachodzą równości*

$$|AB| = |A'B'|, \quad m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle B'), \quad |BC| = |B'C'|,$$

to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Aksjomat 11 *Załóżmy, że* A *jest punktem wewnętrznym, a* B *punktem zewnętrznym pewnej figury. Wówczas odcinek* $\overline{AB}$ *ma punkty wspólne z brzegiem tej figury. Również, każdy z dwóch łuków dowolnego okręgu przechodzącego przez punkty* A *i* B *ma punkty wspólne z tym brzegiem.*

Wszystkie zdania, których prawdziwość może być *wywiedziona* za pomocą wnioskowania logicznego z powyższych aksjomatów nazywamy twierdzeniami **geometrii euklidesowej płaszczyzny**. Proces *wywodzenia*, o którym mowa powyżej, nazywa się **dedukcją**. Zaznaczmy wyraźnie, że n i e z a l e ż y n a m na ściśle dedukcyjnym budowaniu geometrii (byłoby to zresztą bardzo nudne). Opieramy się więc tu i ówdzie na i n t u i c j i, którą, dzięki doświadczeniu, wyrabiamy sobie od urodzenia (według Kanta mamy ją wrodzoną, ale autorzy tego skryptu nie mają wątpliwości, że to jest n o n s e n s).

1.1.3 Ćwiczenia z prostego wnioskowania

Zaczniemy od najprostszych, „jednolinijkowych”, przykładów dedukcji.

TWIERDZENIE 1.1 *Dwie nierównoległe proste mają dokładnie jeden punkt wspólny.*

D O W Ó D. Jeden punkt wspólny mają, bo nie są równoległe. Gdyby miały jeszcze jeden punkt wspólny, to, na mocy A1, musiałyby być równe, czyli równoległe. □

TWIERDZENIE 1.2 *Jeżeli* $k||l$ *i* $l||m$*, to* $k||m$.

D O W Ó D. Załóżmy nie wprost, że prosta k nie jest równoległa do prostej m, i że P jest ich punktem wspólnym. Wtedy proste k i m są prostymi równoległymi do prostej l i przechodzącymi przez punkt P. Na mocy aksjomatu A6 są więc one równe, czyli równoległe. Ta sprzeczność kończy dowód. □

Ćwiczenie 1.2 Pokazać, że w A3 nie potrzeba żądać jedyności punktu A, to znaczy, że jeżeli punkt A o żądanej własności istnieje, to tylko jeden.

Ćwiczenie 1.3 Pokazać, że kąt pełny ma miarę równą 2π.

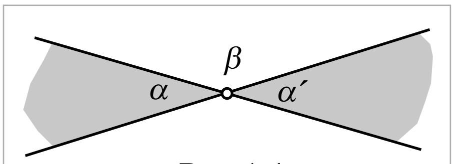
Ćwiczenie 1.4 Pokazać, że półprosta jest figurą wypukłą.

Ćwiczenie 1.5 Pokazać, że każdy trójkąt jest figurą wypukłą.

Ćwiczenie 1.6 Ogólniej, pokazać, że część wspólna dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Kolejną natychmiastową dedukcję widzimy w ***twierdzeniu o kątach wierzchołkowych***:

TWIERDZENIE 1.3 *Kąty wierzchołkowe mają równe miary.*



Rys. 1.4

DOWÓD. Przy oznaczeniach z rysunku mamy:

$$m(\sphericalangle\alpha) + m(\sphericalangle\beta) = \pi, \quad m(\sphericalangle\beta) + m(\sphericalangle\alpha') = \pi.$$

Zatem, po odjęciu stronami: $m(\sphericalangle\alpha') = m(\sphericalangle\alpha)$. □

Ćwiczenie 1.7 Dowieść, że jeżeli dwie proste są prostopadłe, to k a ż d y z czterech utworzonych kątów jest kątem prostym.

Ćwiczenie 1.8 Udowodnić, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

TWIERDZENIE 1.4 *Jeżeli* $l \perp m$ *i* $k \perp m$, *to* $l || k$.

DOWÓD. Gdyby prosta l nie była równoległa do prostej k, to, na mocy T1.1, miałyby one dokładnie jeden punkt wspólny. Oznaczając go przez P znaleźlibyśmy dwie różne proste przechodzące przez punkt P i prostopadłe do prostej m. Byłoby to sprzeczne z aksjomatem A7. Ta sprzeczność kończy dowód. □

Warto pamiętać o poniższym, natychmiastowym, wniosku z A2. Jego tezę nazywać będziemy **nierównością trójkąta**.

Ćwiczenie 1.9 Udowodnić, że długość dowolnego boku trójkąta jest (ściśle) mniejsza od sumy i (ściśle) większa od różnicy długości dwóch pozostałych boków:

$$\boxed{\boxed{b - c < a < b + c.}}$$

Ćwiczenie 1.10 Udowodnić, że punkt X jest punktem

1. wewnętrznym koła $\mathcal{D}(O, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|OX| < r$,

2. zewnętrznym koła $\mathcal{D}(O, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|OX| > r$,

3. brzegowym koła $\mathcal{D}(O, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|OX| = r$.

O punktach wewnętrznych danego koła mówimy też czasami, że leżą *wewnątrz okręgu* tego koła. Jest to dopuszczalny (pod warunkiem świadomości tegoż) s k r ó t. Tymczasem: *okrąg, jako podzbiór płaszczyzny, ma puste wnętrze.* (Dowiedźcie!)

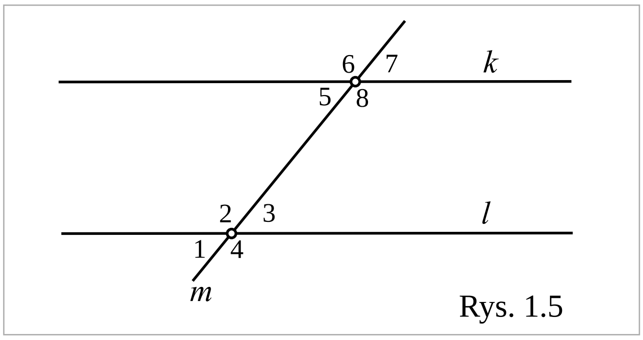
1.1.4 Kąty naprzemianległe i odpowiadające

Niech będą dane dwie różne proste równoległe $k||l$ i prosta m nierównoległa do nich.

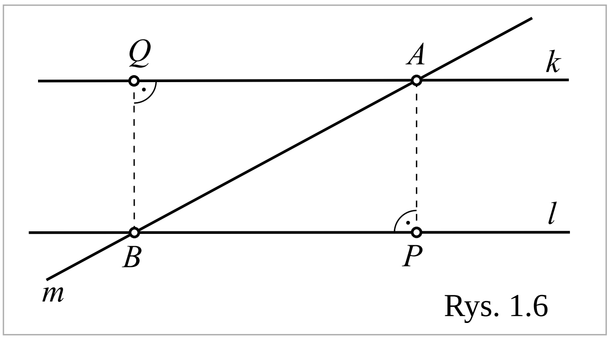
W takiej sytuacji (zobacz rysunek 1.5) parę $(\sphericalangle 1, \sphericalangle 5)$ nazywamy parą kątów **odpowiadających**. Również pary $(\sphericalangle 2, \sphericalangle 6)$, $(\sphericalangle 3, \sphericalangle 7)$ i $(\sphericalangle 4, \sphericalangle 8)$ nazywamy parami kątów odpowiadających. Pary $(\sphericalangle 3, \sphericalangle 5)$ i $(\sphericalangle 2, \sphericalangle 8)$ nazywamy parami kątów **naprzemianległych wewnętrznych**, a pary $(\sphericalangle 4, \sphericalangle 6)$ i $(\sphericalangle 1, \sphericalangle 7)$ – parami kątów **naprzemianległych zewnętrznych**.

Twierdzenie 1.5 *Kąty odpowiadające mają równe miary. Również kąty naprzemianległe mają równe miary.*

D o w ó d. W przypadku, gdy $m \perp l$, na mocy A8, zachodzi też $m \perp k$, więc wszystkie badane kąty mają miary równe $\frac{\pi}{2}$, zobacz C1.7. Jeżeli m nie jest prostopadła do k (ani do l!), to niech Q oznacza rzut punktu B przecięcia prostych l i m na prostą k, a P rzut punktu A przecięcia prostych k i m na prostą l (patrz rysunek 1.6). Powstały dwa trójkąty $\triangle AQB$ i $\triangle BPA$. Pokażemy, że trójkąty te są przystające.



Rys. 1.5



Rys. 1.6

Zgodnie z definicją rzutu punktu na prostą, mamy $k \perp BQ$. Ta prostopadłość wraz z założeniem $k||l$, daje, na mocy A8, $BQ \perp l$. Widzimy stąd, że B jest rzutem punktu Q na prostą l. Jednocześnie P jest rzutem punktu A na prostą l, więc, na mocy A9 i A2,

$$|QB| = |AP| = |PA|. \tag{1.1}$$

Ponieważ obie proste BQ i AP są prostopadłe do prostej l, więc, na mocy T1.4, wnioskujemy, że $BQ||AP$. Ponadto Q jest rzutem punktu A na prostą BQ, a B jest rzutem punktu P na tę samą prostą (dlaczego?). Powołując się ponownie na A2 i A9, widzimy, że

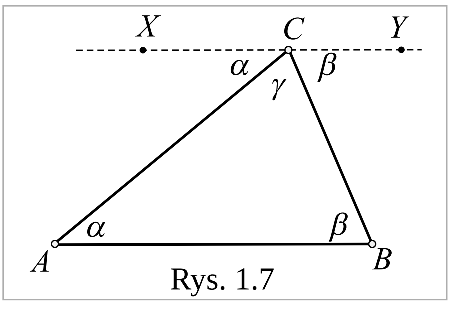
$$|QA| = |AQ| = |PB|. \tag{1.2}$$

Równości (1.1), (1.2) i, wynikająca z konstrukcji, równość $m(\sphericalangle AQB) = \frac{\pi}{2} = m(\sphericalangle BPA)$, na mocy cechy BKB przystawania trójkątów (patrz A10), dają przystawanie

$$\triangle AQB \equiv \triangle BPA,$$

z którego wnioskujemy, że $m(\sphericalangle QAB) = m(\sphericalangle PBA)$, co oznacza równość miar kątów naprzemianległych. Reszta dowodu jest fraszką igraszką. □

Twierdzenie 1.6 *Suma miar kątów dowolnego trójkąta wynosi* π $(= 180°)$.



Rys. 1.7

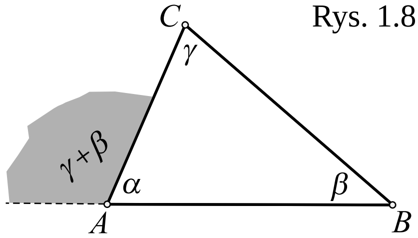
D o w ó d. Rozważmy dowolny trójkąt $\triangle ABC$. Niech prosta XY będzie przechodzącą przez C prostą równoległą do prostej AB. Różne od C, punkty X, Y wybrano z odpowiednich stron punktu C, zob. rysunek 1.7. Wtedy

$$\alpha + \gamma + \beta = m(\sphericalangle ACX) + \gamma + m(\sphericalangle BCY) = \pi,$$

na mocy twierdzenia T1.5 o równości miar kątów naprzemianległych wewnętrznych. □

Kolejne dwa twierdzenia są wnioskami z T1.6. Pierwsze z nich mówi o mierze kąta zewnętrznego trójkąta.

Dla danego trójkąta $\triangle ABC$ każdy (z dwóch) kąt przyległy do kąta $\sphericalangle A$ nazywamy **kątem zewnętrznym** przy wierzchołku A, (zob. rys. 1.8). Kąty trójkąta nazywamy (dla odróżnienia) w e w n ę t r z n y m i.



Rys. 1.8

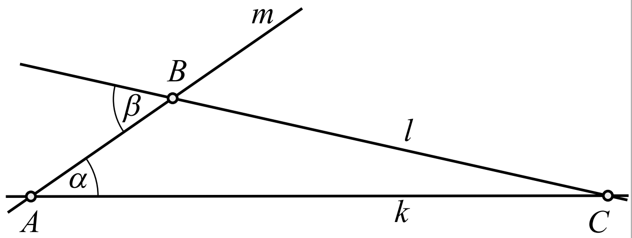
Dowód twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta jest natychmiastowy:

TWIERDZENIE 1.7 (***o kącie zewnętrznym trójkąta***) *Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych do niego nie przylegających. W szczególności jest ona ściśle większa niż miara każdego kąta wewnętrznego do niego nie przylegającego.* □

Dobrze jest zdawać sobie sprawę z prawdziwości twierdzenia odwrotnego do T1.5:

TWIERDZENIE 1.8 *Niech k i l będą dwiema różnymi prostymi i niech prosta m przecina prostą k w punkcie A, a prostą l w, różnym od A, punkcie B. Załóżmy ponadto, że miary kątów naprzemianległych $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$ są równe. Wtedy proste k, l są równoległe.*

D O W Ó D. Gdyby proste k i l nie były równoległe, to miałyby (zobacz T1.1) punkt wspólny. Oznaczając go C, mielibyśmy, na mocy twierdzenia o kącie zewnętrznym w trójkącie, $\beta = \alpha + m(\sphericalangle C)$. Stąd, na mocy założenia, $m(\sphericalangle ACB) = 0$, a to jest niemożliwe (patrz A4.1). □



Rys. 1.9

1.1.5 Cecha KBK przystawania trójkątów

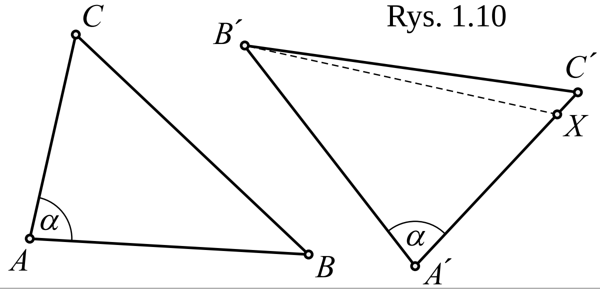
Wśród naszych aksjomatów mamy aksjomat A10 – cechę Bok-Kąt-Bok przystawania trójkątów. Pozostałe dwie cechy przystawania są – w naszym wykładzie – twierdzeniami.

TWIERDZENIE 1.9 (***Cecha przystawania*** **KBK**) *Jeżeli dla danych trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ zachodzą równości*

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A'), \quad |AB| = |A'B'|, \quad m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle B'),$$

to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

D O W Ó D. Załóżmy, że $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $|AB| = |A'B'|$. Dla wykazania przystawania trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ wystarczy, na mocy A10, czyli cechy BKB przystawania, wykazać, że $|AC| = |A'C'|$. Załóżmy nie wprost, że $|AC| < |A'C'|$ i wybierzmy taki punkt $X \in \overline{A'C'}$, że $|A'X| = |AC|$. Wtedy, na mocy BKB, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X$.



Rys. 1.10

Stąd dostajemy:

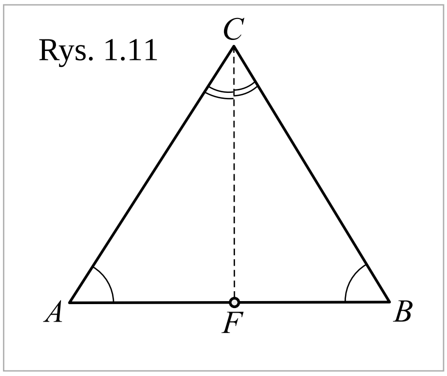
$$\beta' = m(\sphericalangle A'B'C') = m(\sphericalangle A'B'X) + m(\sphericalangle XB'C') > m(\sphericalangle A'B'X) = m(\sphericalangle ABC) = \beta.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem, że $\beta = \beta'$. Założenie $|AC| > |A'C'|$ tak samo prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być $|AC| = |A'C'|$. □

1.1.6 *Pons asinorum*

Nawet największe osły w klasie muszą przyswoić sobie *pons asinorum* – twierdzenie absolutnie podstawowe w geometrii absolutnej. Odwołanie do mostu (*pons* (łac.) – most) pochodzi z języka żaków średniowiecznych, którym rysunek obmyślony przez Euklidesa dla dowodu tego twierdzenia przypominał most, przez który jedynie osioł (*asinus* (łac.) – osioł) nie był w stanie przejść do królestwa geometrii. Pokażemy dwa dowody *pons asinorum*, oba prostsze niż oryginalny Euklidesa. Drugi, pochodzący od Pappusa jest szczególnie godny uwagi. Samo twierdzenie mówi, że warunkiem koniecznym i wystarczającym równości (długości) dwóch boków w trójkącie jest równość (miar) kątów leżących naprzeciwko tych boków.

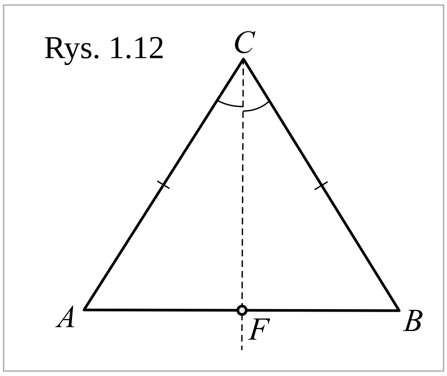
Twierdzenie 1.10 (***Pons asinorum***) *Równość $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$ w danym trójkącie $\triangle ABC$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość $|AC| = |BC|$.*



DOWÓD. ($\Longrightarrow$) Załóżmy (zob. rysunek 1.11), że $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$. Niech $F \in \overline{AB}$ będzie takim punktem, że $m(\sphericalangle FCA) = m(\sphericalangle FCB)$. Wtedy

$$m(\sphericalangle CFB) = \pi - m(\sphericalangle FCB) - m(\sphericalangle B) =$$
$$\pi - m(\sphericalangle FCA) - m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle CFA).$$

Wobec tego, na mocy cechy KBK przystawania, mamy $\triangle AFC \equiv \triangle BFC$, bo oba te trójkąty mają kąty o równych miarach przy wspólnym boku $\overline{CF}$. Zatem $|AC| = |BC|$.



($\Longleftarrow$) Załóżmy (patrz rysunek 1.12), że $|AC| = |BC|$. Niech $\overline{CF}$ będzie, tak jak poprzednio, dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Wtedy trójkąty $\triangle AFC$ i $\triangle BFC$ mają równej długości boki, $|CF| = |CF|$ i $|AC| = |BC|$. Dodatkowo $m(\sphericalangle ACF) = m(\sphericalangle BCF)$, zatem , na mocy cechy BKB przystawania trójkątów, mamy $\triangle ACF \equiv \triangle BCF$. W szczególności $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$. □

Prostszy, chociaż podobno trudniejszy do zrozumienia przez uczniów, dowód Pappusa, przebiega następująco:

DOWÓD. Jeżeli $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$, to $\triangle ABC \equiv \triangle BAC$ (sic!) na mocy cechy KBK przystawania. Więc $|AC| = |BC|$. Odwrotnie, jeżeli $|AC| = |BC|$, to $\triangle ABC \equiv \triangle BAC$ na mocy cechy BKB przystawania. Więc $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$. □

Pons asinorum wyróżnia bardzo ważną klasę trójkątów:

Definicja 1.3 Trójkąt nazywamy **równoramiennym**, gdy ma dwa boki równej długości. Równe boki nazywamy wówczas **ramionami**, a trzeci bok nazywamy **podstawą** trójkąta.

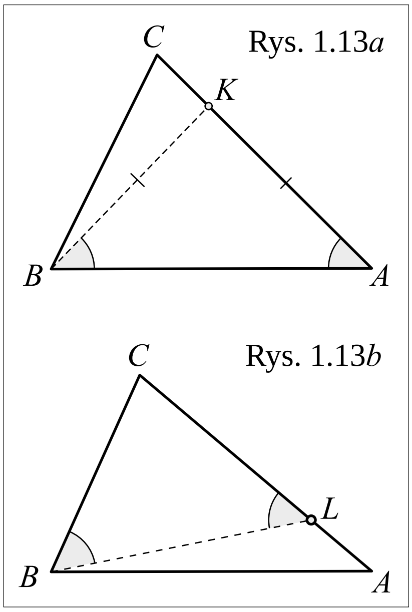
Zobaczymy teraz, że prawdziwe jest następujące wzmocnienie *pons asinorum*:

TWIERDZENIE 1.11 *Dany jest trójkąt* $\triangle ABC$. *Wówczas* $m(\sphericalangle A) \leqslant m(\sphericalangle B)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a \leqslant b$.

DOWÓD. Przypadek zachodzenia równości rozpatrzyliśmy w T1.10. Zajmiemy się więc przypadkiem nierówności ścisłych.

($\Longrightarrow$) Załóżmy (zob. rysunek 1.13a), że $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle B)$ i weźmy taką półprostą h_{BK} we wnętrzu kąta $\sphericalangle ABC$ by $m(\sphericalangle ABK) = m(\sphericalangle BAK)$. (Istnienie takiej półprostej, dokładnie jednej, zapewnia nam A4.4.) Na mocy twierdzenia *pons asinorum* mamy $|BK| = |AK|$. Ta równość i nierówność trójkąta zastosowana do trójkąta $\triangle BCK$ daje nam

$$a = |BC| < |BK| + |KC| = |AK| + |KC| = |AC| = b.$$



Rys. 1.13a
Rys. 1.13b

($\Longleftarrow$) Niech teraz (zob. rysunek 1.13b) $a < b$. Na boku $\overline{CA}$ wybieramy punkt L taki, by $|CL| = a$. Wówczas trójkąt $\triangle BLC$ jest równoramienny. Zatem, na mocy *pons asinorum*, mamy $m(\sphericalangle LBC) = m(\sphericalangle BLC)$. Ale kąt $\sphericalangle BLC$ jest kątem zewnętrznym w trójkącie $\triangle ABL$, zatem $m(\sphericalangle BLC) > m(\sphericalangle A)$. Ostatecznie mamy

$$m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle BLC) = m(\sphericalangle LBC) < m(\sphericalangle B). \square$$

Ćwiczenie 1.11 Dowieść, że jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ zachodzi równość $|AC| = |BC|$, to wysokość, środkowa i dwusieczna poprowadzone z wierzchołka C pokrywają się.

Ćwiczenie 1.12 Dany jest trójkąt i trzy odcinki: wysokość, dwusieczna i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka. Udowodnić, że jeżeli dowolne dwa z tych odcinków pokrywają się, to ten trójkąt jest równoramienny.

Ćwiczenie 1.13 Dowieść, że trójkąt ma trzy kąty równej miary wtedy i tylko wtedy, gdy ma trzy boki równej długości. Taki trójkąt nazywa się **równobocznym**.

Ćwiczenie 1.14 Udowodnić, że dla dowolnego trójkąta prawdziwe są trzy implikacje:

(1) $(a = b) \Rightarrow (h_a = h_b)$, **(2)** $(a = b) \Rightarrow (m_a = m_b)$, **(3)** $(a = b) \Rightarrow (d_a = d_b)$.

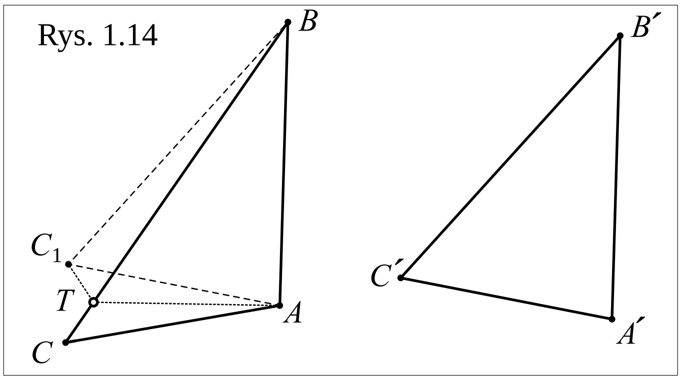
Implikacje odwrotne do powyższych również są prawdziwe. Przekonamy się o tym w dalszym ciągu. Zobacz na przykład C1.45 i T2.16.

1.1.7 Cecha BBB przystawania trójkątów

W twierdzeniach T1.10 i T1.11 porównywaliśmy kąty (i boki) tego samego trójkąta. Kolejny ustęp zaczynamy od twierdzenia o porównywaniu kątów różnych trójkątów. Wykorzystamy to twierdzenie w dowodzie trzeciej cechy przystawania trójkątów.

TWIERDZENIE 1.12 (***Twierdzenie o porównywaniu***) *Załóżmy, że dla danych trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ zachodzą równości $|AB| = |A'B'|$ i $|AC| = |A'C'|$. Wówczas*

$$m(\sphericalangle CAB) > m(\sphericalangle C'A'B') \quad \Longleftrightarrow \quad |BC| > |B'C'|.$$



DOWÓD. ($\Longrightarrow$) Niech C_1 będzie takim punktem wewnątrz kąta $\sphericalangle CAB$, że $m(\sphericalangle C_1AB) = m(\sphericalangle C'A'B')$ i $|C_1A| = |CA|$. Przez T oznaczymy taki punkt odcinka $\overline{BC}$, że półprosta h_{AT} jest dwusieczną kąta $\sphericalangle CAC_1$. Wówczas, na mocy cechy przystawania BKB, zobacz A10, mamy $\triangle CAT \equiv \triangle C_1AT$. Zatem $|TC| = |TC_1|$. Ta równość daje nam drugą równość w ciągu:

$$|BC| = |BT| + |TC| = |BT| + |TC_1| > |BC_1| = |B'C'|,$$

w którym nierówność wynika z A2.2, a ostatnia równość wynika z przystawania $\triangle ABC_1 \equiv \triangle A'B'C'$. To przystawanie zaś wynika z założeń i A10.

($\Longleftarrow$) Niech teraz $|BC| > |B'C'|$. Załóżmy, nie wprost, że $m(\sphericalangle CAB) \leqslant m(\sphericalangle C'A'B')$. Wówczas albo $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle C'A'B')$ i wtedy, na mocy A10, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, więc $|BC| = |B'C'|$ (sprzeczność), albo $m(\sphericalangle CAB) < m(\sphericalangle C'A'B')$ i wtedy, na mocy udowodnionej już części naszego twierdzenia, $|BC| < |B'C'|$ (sprzeczność jeszcze większa!). Uzyskane sprzeczności kończą dowód. □

Wnioskiem z twierdzenia o porównywaniu jest nasza ostatnia cecha przystawania trójkątów:

WNIOSEK. (***Cecha przystawania*** BBB) *Jeżeli dla trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ zachodzą równości*

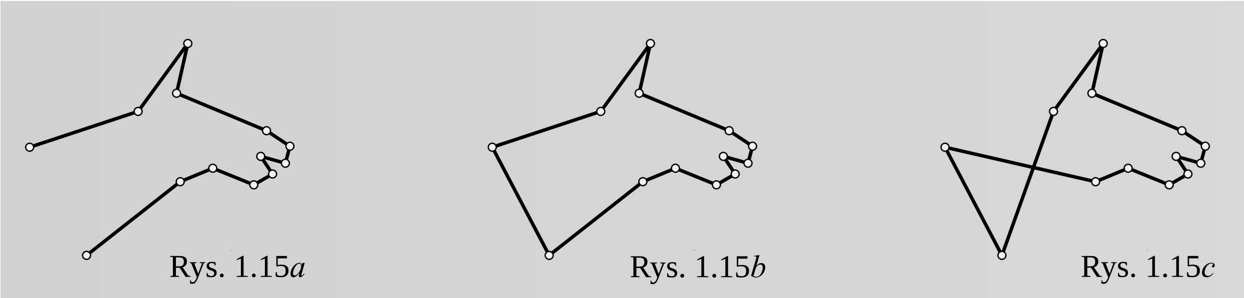
$$|AB| = |A'B'|, \quad |BC| = |B'C'|, \quad |CA| = |C'A'|,$$

to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

DOWÓD. Ponieważ, wobec T1.12, wiemy, że nierówność $m(\sphericalangle A) \neq m(\sphericalangle A')$ równoważna jest nierówności $|BC| \neq |B'C'|$, więc musi zachodzić równość $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A')$. Ta równość i A10 dają tezę. □

1.1.8 Łamane i wielokąty

Przypomnimy teraz kilkanaście pojęć dotyczących łamanych i wielokątów.



Rys. 1.15*a* Rys. 1.15*b* Rys. 1.15*c*

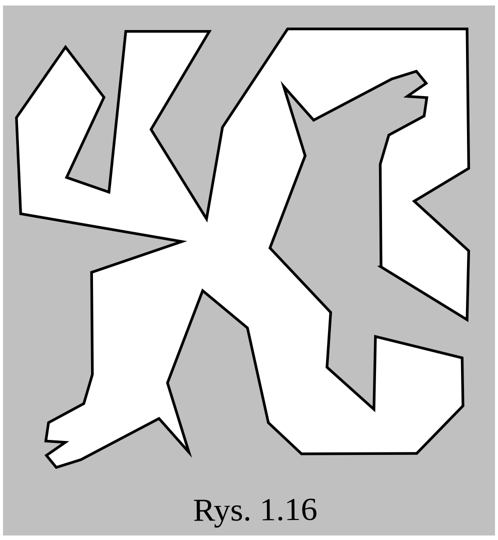
Definicja 1.4 Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geqslant 3$, jest układem n *różnych* punktów, to figurę będącą sumą (teoriomnogościową) odcinków

$$\overline{A_1A_2}, \quad \overline{A_2A_3}, \quad \ldots, \quad \overline{A_{n-1}A_n} \tag{1.3}$$

nazywa się **łamaną otwartą**. Jeżeli do odcinków (1.3) dołożymy jeszcze odcinek $\overline{A_nA_1}$, to otrzymaną figurę nazywamy **łamaną zamkniętą**. Łamaną (zarówno otwartą jak i zamkniętą) oznaczamy $A_1A_2 \ldots A_n$, wypisując *kolejne* jej **wierzchołki** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i wskazując czy mamy do czynienia z łamaną zamkniętą czy otwartą. Odcinki (1.3) (i ewentualnie $\overline{A_nA_1}$) nazywać będziemy **bokami** łamanej, a każdy nie będący bokiem, odcinek $\overline{A_kA_l}$ łączący dwa różne wierzchołki łamanej jej **przekątną**. Jeżeli każde dwa boki danej łamanej albo są rozłączne, albo mają tylko wspólny wierzchołek, to mówimy, że ta łamana jest **łamaną bez samoprzecięć** lub **łamaną zwyczajną**. Na rysunku 1.15a widzimy zwyczajną łamaną otwartą, na rysunku 1.15b łamaną zwyczajną zamkniętą i na rysunku 1.15c łamaną zamkniętą z samoprzecięciami. **Długością łamanej** nazywamy sumę długości wszystkich tworzących ją odcinków.

Ćwiczenie 1.15 Dowieść, że długość dowolnej łamanej jest większa lub równa długości dowolnej jej przekątnej.

Łamana zamknięta zwyczajna dzieli płaszczyznę na dwie części, jedną ograniczoną, zwaną **wnętrzem** tej łamanej, drugą nieograniczoną, zwaną **zewnętrzem**. Zobacz rysunek 1.16. Zwróćmy uwagę, że dowód tego intuicyjnie oczywistego faktu jest stosunkowo łatwy w przypadku wielokąta wypukłego, porównaj C1.16, i dość wymagający w przypadku niewypukłym.



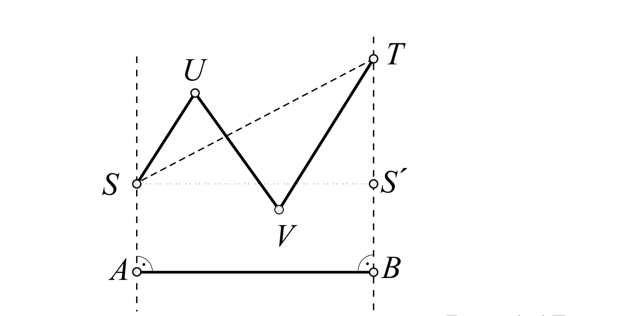
Rys. 1.16

Definicja 1.5 Łamaną zamkniętą bez samoprzecięć *wraz* z wnętrzem nazywamy **wielokątem**. Gdy ma ona n boków, nazywamy ją również n-**kątem** (mówimy o **czworokącie**, **pięciokącie** itd., zamiast o 4-kącie, 5-kącie itd.). **Wielokątem wypukłym** nazywamy taki wielokąt, który jest figurą wypukłą.

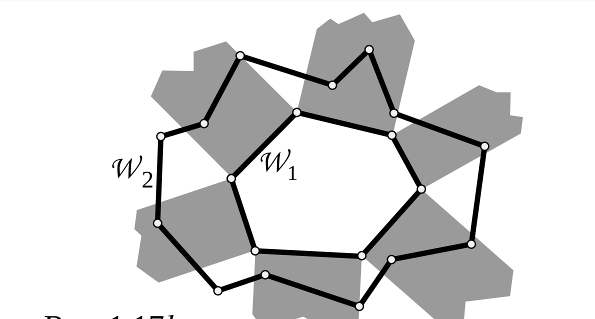
Ćwiczenie 1.16 Udowodnić, że wielokąt jest wielokątem wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy cały leży w jednej półpłaszczyźnie, której krawędzią jest prosta wyznaczona przez każdy jego bok.

ZADANIE 1.1 Udowodnić, że jeżeli wielokąt wypukły $\mathcal{W}_1$ jest zawarty wewnątrz wielokąta $\mathcal{W}_2$ (niekoniecznie wypukłego), to obwód (czyli suma długości boków) wielokąta $\mathcal{W}_1$ jest mniejszy od obwodu wielokąta $\mathcal{W}_2$.

ROZWIĄZANIE. Rozwiązanie łatwo odczytać z rysunków. Na rys. 1.17a widać ilustrację dowodu Lematu: *Łamana łącząca punkty półprostych ograniczających „studnię" o podstawie* $\overline{AB}$ *ma długość większą bądź równą* $|AB|$. Na przykład $|SU|+|UV|+|VT| \geqslant |ST| \geqslant |AB|$. Pierwsza nierówność wynika z C1.15. Dla dowodu drugiej rozważmy trójkąt $\triangle STS'$, gdzie S' oznacza rzut punktu S na prostą BT i skorzystajmy z T1.11.



Rys. 1.17a



Rys. 1.17b

Dzięki temu lematowi widzimy (zob. rysunek 1.17b), że suma części obwodu wielokąta $\mathcal{W}_2$ leżących w „studniach" o podstawach będących bokami wielokąta $\mathcal{W}_1$ jest nie mniejsza od obwodu wielokąta $\mathcal{W}_1$, bo „studnie" są parami rozłączne. Uzasadnienie (wynikającej z wypukłości wielokąta $\mathcal{W}_1$) rozłączności rzeczonych studni pozostawiamy Czytelnikowi. Można się tu powołać na C1.16. ◊

Ćwiczenie 1.17 Wykazać, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ suma $|AC|+|BD|$ długości przekątnych jest ściśle większa od sumy $|AD|+|BC|$ długości dwóch przeciwległych boków.

Ćwiczenie 1.18 Wykazać, że w czworokącie wypukłym suma długości jego przekątnych jest ściśle większa od połowy obwodu i ściśle mniejsza od obwodu tego czworokąta.

Ćwiczenie 1.19 Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wyznaczyć taki punkt X, dla którego suma $|AX|+|BX|+|CX|+|DX|$ odległości od wierzchołków czworokąta jest najmniejsza. *Wskazówka.* Zbadać punkt przecięcia przekątnych.

Ćwiczenie 1.20 Wykazać, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy jego obwodu.

Pięknym przykładem rozumowania *olimpijskiego* jest rozwiązanie kolejnego zadania. Stosujemy w nim oczywistą Zasadę Minimum: w każdym skończonym(!) zbiorze liczb rzeczywistych istnieje (dokładnie jedna) liczba najmniejsza.

ZADANIE 1.2 Żadne trzy z danych 2000 punktów na płaszczyźnie nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje wielokąt, którego jedynymi wierzchołkami są te punkty.

ROZWIĄZANIE. Jasne, że istnieją łamane zamknięte, których jedynymi wierzchołkami są (wszystkie!) dane punkty. Aby to uzasadnić wystarczy dowolnie ponumerować te punkty. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będzie takim ponumerowaniem. Wówczas

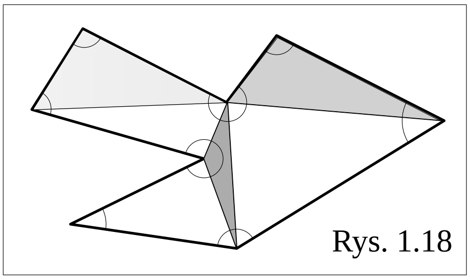
$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$$

jest żądaną łamaną zamkniętą. Z wszystkich takich łamanych wybierzmy łamaną $\mathcal{F}$ o najmniejszej długości. Twierdzimy, że ta nie ma samoprzecięć, czyli że jest wielokątem. Załóżmy, nie wprost, że boki $\overline{A_sA_{s+1}}$ i $\overline{A_tA_{t+1}}$, gdzie $s < s+1 < t < t+1$, przecinają się w pewnym punkcie P. Możemy wówczas zbudować nową łamaną $\mathcal{F}'$

$$\overline{A_1A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_{s-1}A_s} \cup \overline{A_sA_t} \cup \ldots \cup \overline{A_{s+2}A_{s+1}} \cup \overline{A_{s+1}A_{t+1}} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1},$$

która „startuje” od A_1 i „dochodzi” do A_s, następnie „przeskakuje” na A_t, potem „wraca” do A_{s+1}, skąd „przeskakuje” na A_{t+1} i „kończy” tak samo jak $\mathcal{F}$. Łamana $\mathcal{F}'$ ma mniejszą długość niż łamana $\mathcal{F}$. Powstaje bowiem przez wyrzucenie przekątnych $\overline{A_sA_{s+1}}$, $\overline{A_tA_{t+1}}$ czworokąta wypukłego(!) $A_sA_tA_{s+1}A_{t+1}$ i zastąpienie ich bokami $\overline{A_sA_t}$, $\overline{A_{s+1}A_{t+1}}$ tego czworokąta, zobacz C1.17. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie. $\Diamond$

Ćwiczenie 1.21 Zdefiniować kąt wewnętrzny wielokąta i dowieść, że suma miar kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wynosi $(n-2)\pi$. *Wskazówka.* Dowolna przekątna n-kąta wypukłego dzieli ten wielokąt na dwa wielokąty o mniejszej liczbie boków, więc oczywista indukcja względem n pozwala zakończyć rozumowanie w przypadku wypukłym. Przypadek niewypukły (np. rys. 1.18) jest trudniejszy, zobacz $\mathbb{KOM}$ Z0.C8.

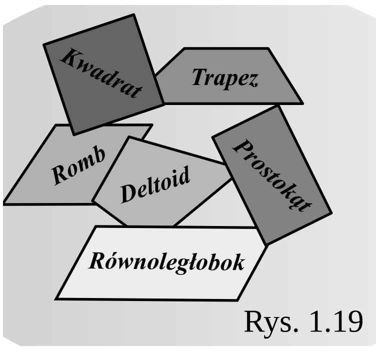


Rys. 1.18

Poniższe, potraktowane skrótowo, definicje paru typów czworokątów są, oczywiście, doskonale znane Czytelnikowi:

Czworokąt wypukły nazywamy

- ▷ **równoległobokiem**, gdy ma przeciwległe boki równoległe,
- ▷ **prostokątem**, gdy ma wszystkie kąty proste,
- ▷ **rombem**, gdy ma wszystkie boki równej długości,
- ▷ **kwadratem**, gdy jest rombem o wszystkich kątach prostych,
- ▷ **trapezem**, gdy ma parę przeciwległych boków równoległych,
- ▷ **deltoidem**, gdy ma rozłączne pary boków sąsiednich równych.



Rys. 1.19

1.1.9 Równoległobok. Równoważność wektorów

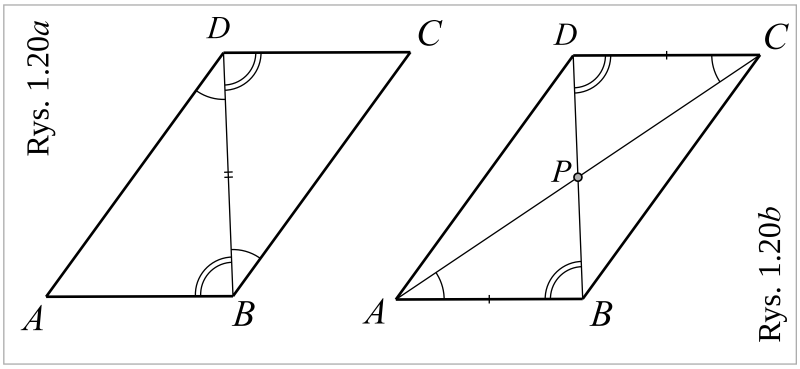
W tym ustępie powiemy słów kilka o równoległobokach. Podstawowym (z pewnością wszystkim doskonale znanym) twierdzeniem o równoległoboku jest poniższe:

Twierdzenie 1.13 *W równoległoboku*

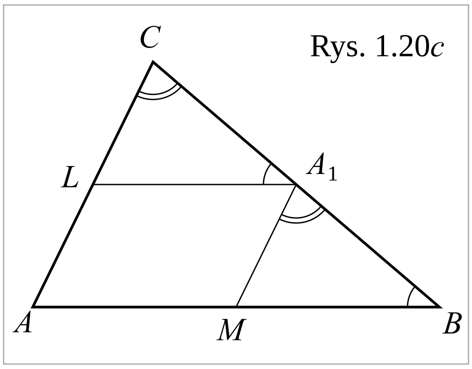
(1) *przeciwległe kąty są równej miary,*

(2) *przeciwległe boki są równej długości,*

(3) *przekątne przecinają się w punkcie dzielącym każdą z nich na połowy.*



Rys. 1.20a Rys. 1.20b



Rys. 1.20c

Dowód. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Poprowadźmy przekątną (zobacz rysunek 1.20a) $\overline{BD}$ i rozważmy trójkąty $\triangle ABD$ i $\triangle CDB$. Zauważamy, że kąty $\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle CDB$ są parą kątów naprzemianległych (dla prostych równoległych $AB||CD$ przeciętych prostą BD), mają więc równe miary. Podobnie, kąty $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle CBD$ są parą kątów naprzemianległych (dla prostych równoległych $AD||BC$ przeciętych prostą BD). Stąd, na mocy cechy KBK przystawania trójkątów, mamy $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, bowiem $|BD| = |DB|$. Zatem $|AB| = |CD|$, $|AD| = |CB|$ i $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BCD)$. To dowodzi prawdziwości tez (1) i (2). Dla dowodu prawdziwości tezy (3), oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych (rysunek 1.20b). I, znowu korzystając z KBK, sprawdźmy, że zachodzi przystawanie $\triangle ABP \equiv \triangle CDP$. Jasne, że to pozwoli zakończyć dowód. $\square$

Już teraz udowodnimy ***twierdzenie o odcinku środkowym w trójkącie*** [przypomnijmy, że przez A_1, B_1 i C_1 oznaczamy środki boków $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trójkąta $\triangle ABC$]:

ZADANIE 1.3 Udowodnić, że odcinek $\overline{A_1B_1}$ jest równoległy do boku $\overline{AB}$, a jego długość wynosi $\frac{1}{2}|AB|$.

ROZWIĄZANIE. Niech $L \in \overline{CA}$ i $M \in \overline{AB}$ będą takimi punktami, że AMA_1L jest równoległobokiem, zobacz rysunek 1.20c. Wówczas, na mocy równości (miar) kątów odpowiadających (zob. T1.5), dostajemy równości $m(\sphericalangle LCA_1) = m(\sphericalangle MA_1B)$ i $m(\sphericalangle LA_1C) = m(\sphericalangle MBA_1)$. Te równości, założona równość $|CA_1| = |A_1B|$ i cecha KBK przystawania trójkątów, dają $\triangle CLA_1 \equiv \triangle A_1MB$. Stąd $|CL| = |A_1M| = |LA|$, gdzie druga równość wynika z T1.13(2). Wobec tego $L = B_1$. Podobnie, $|BM| = |A_1L| = |MA|$, więc $M = C_1$. Jasne, że stąd dostajemy tezę. $\Diamond$

Uwaga. Rozpoznanie, że występujący w pewnej sytuacji geometrycznej czworokąt jest równoległobokiem, ma często rozstrzygające znaczenie w procesie rozwiązywania zadania. Wobec tego miłą okolicznością jest fakt, że tezy T1.13 można odwrócić. Mówi o tym poniższe ćwiczenie, które należy bezwzględnie (i szczegółowo!) rozwiązać.

Ćwiczenie 1.22 Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Dowieść, że jeżeli zachodzi którykolwiek z poniższych warunków (1), (2) lub (3), to $ABCD$ jest równoległobokiem.

(1) $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle DCB)$ i $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC)$,

(2) $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$,

(3) przekątne $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ przecinają się w punkcie dzielącym każdą z nich na połowy.

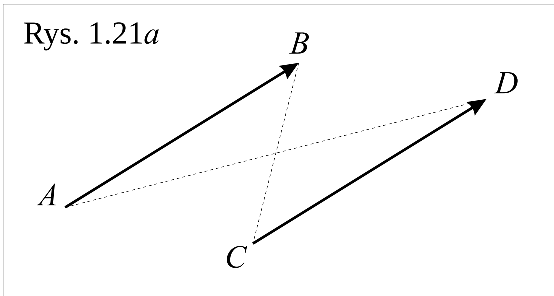
Ćwiczenie 1.23 Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $|AB| = |CD|$ i $\overline{AB}||\overline{CD}$. Udowodnić, że $ABCD$ jest równoległobokiem.

Równoległoboki „wykorzystuje" się w definicji równoważności i dodawania wektorów.

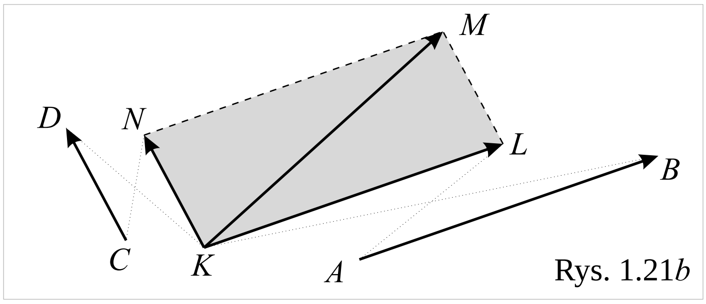
Definicja 1.6 **Wektorem** o początku A i końcu B nazywamy uporządkowaną parę punktów A, B. Oznaczamy go $\overrightarrow{AB}$. Na rysunku zaznaczamy wektor $\overrightarrow{AB}$ za pomocą odcinka $\overline{AB}$ z grotem przy końcu B. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ nazywamy **równoważnymi**, co zapisujemy $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, gdy środki odcinków $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ pokrywają się, zobacz rysunek 1.21a.

Ćwiczenie 1.24 Uzasadnić, że relacja $\equiv$ jest relacją równoważności, zobacz $\mathbb{KOM}$.

Wektory dodajemy zgodnie z ***regułą równoległoboku***: Jeżeli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ są wektorami, a $KLMN$ jest takim równoległobokiem, że $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{KN}$, to wektor $\overrightarrow{KM}$ nazywamy **sumą** wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, co zapisujemy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{KM}$. Zobacz rysunek 1.21$b$.



Rys. 1.21a



Rys. 1.21b

Ćwiczenie 1.25 Udowodnić, że dodawanie wektorów jest łączne, to znaczy że

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} \equiv \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF})$$

dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

1.1.10 Symetria osiowa

Poznamy teraz nasze pierwsze **przekształcenie geometryczne**. Przekształcenie geometryczne jest różnowartościową funkcją z płaszczyzny na siebie spełniającą pewne warunki typu geometrycznego. Dokładniej o tym pomówimy później, zobacz rozdział 4.

Definicja 1.7 Niech dana będzie prosta k. Dla danego punktu X oznaczamy przez X^k taki (jedyny!) punkt, że rzut X_k punktu X na prostą k jest środkiem odcinka o końcach X i X^k. W ten sposób określoną funkcję $\mathrm{S}_k : X \longmapsto X^k$ nazywa się **odbiciem w prostej** k lub **symetrią osiową o osi** k.