MATEMATYKA

DAWNA I NOWA

Marek Zakrzewski

MATEMATYKA

DAWNA I NOWA

TOM I

Funkcje i przestrzenie

GiS

Projekt okładki
DWA:WIATRY Pracownia graficzna

Zdjęcie na okładce
Artur Zakrzewski

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–78–5

Wydanie I, Wrocław 2020
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Sp. z o.o. Sp. k.

Dla wielu studentów jest pewnym rozczarowaniem, że nigdy nie mają kursu matematyki. Mają kursy rachunku [różniczkowego i całkowego], algebry, topologii itd., ale podział pracy przy nauczaniu zdaje się uniemożliwiać połączenie tych różnych przedmiotów w jedną całość.

John Stillwell, *Mathematics and Its History*,
Springer Verlag 1989

Panuje błędne przekonanie, iż jedynie prowadzenie badań naukowych jest rzeczą godną uznania, a przedstawianie i upowszechnianie wyników to rzecz podrzędna i uboczna. A przecież wymaga to takich samych uzdolnień i głębokiego rozumienia [przedmiotu].

Emil Timerding 1910,
cyt. wg V. Remmert, U. Schneider, Eine Disziplin und ihre Verleger, transcript Verlag 2010

Spis treści

Wstęp

Odkrywanie związków pomiędzy różnorodnymi obiektami matematycznymi można porównać do odkrycia związku pomiędzy elektrycznością a magnetyzmem w fizyce, czy też — w geologii — odkryciem podobieństwa pomiędzy wschodnią linią brzegową Ameryki Południowej a zachodnią Afryki. Emocjonalne znaczenie takich odkryć w nauczaniu trudno przecenić. To one uczą nas szukać i odkrywać cudowną harmonię Wszechświata.

Władimir I. Arnold (1937-2010),
O nauczaniu matematyki, wykład wygłoszony
w Palais de Découverte w Paryżu w 1997 r.

Mimo rosnącej specjalizacji fizycy, biolodzy, historycy, a ostatnio też informatycy podejmują trud uchwycenia swej dyscypliny jako pewnej całości i kreślą śmiałe syntezy. Wydaje się, że matematycy tę ambicję dawno już porzucili.

Niniejsze dwa tomy są próbą **całościowego spojrzenia** na matematykę w zakresie odpowiadającym z grubsza studiom licencjackim. Chociaż około 70% tekstu pochodzi z trzech początkowych tomów cyklu *Markowe Wykłady z Matematyki* jest to **zasadniczo nowa** książka: ma inny cel, inny układ i nieco innego adresata.

Spojrzenie na całość tym się różni od szczegółowego studiowania poszczególnych dyscyplin, czym oglądanie mapy świata różni się od studiowania map poszczególnych krajów czy regionów: nie widzimy szczegółów, ale lepiej dostrzegamy związki. W typowym kursie analizy nie ma czasu na pokazanie jej zastosowań w teorii liczb, na kursie teorii grafów rzadko wspomina się o parkietażach. Wykład liczb zespolonych niezmiernie rzadko jest wiązany z konstrukcjami geometrycznymi czy geometrią hiperboliczną.

Uzyskanie w miarę spójnej perspektywy było możliwe głównie dzięki temu, że odszedłem znacząco od standardowego porządku. Tradycyjny układ materiału ma zapewne swoje uzasadnienie dydaktyczne, ale zbyt często wykładowca musi mówić o rzeczach, których znaczenie będzie widoczne w dalekiej przyszłości. Pisząc tę książkę trzymałem się bezwzględnie zasady, że **problemy muszą pojawiać się naturalnie**.

Idealny czytelnik

Kolejne tomy cyklu MWM w przybliżeniu odpowiadały pojedynczym dyscyplinom matematycznym, więc były prawie dopasowane do standardowych kursów. Synteza matematyki narzuca nietypowy układ materiału i nie odpowiada żadnemu realnemu kursowi. W konsekwencji wymaga od Czytelnika większej samodzielności. Wymarzonym Czytelnikiem książki jest osoba poważnie zainteresowana matematyką, chcąca zrozumieć jej **motywacje i powiązania**.

Mam nadzieję, że dla wielu studentów matematyki i fizyki wykłady te staną się naturalną lekturą uzupełniającą począwszy od I roku studiów przynajmniej do ich końca, a może jeszcze dłużej. Mogą być też lekturą podstawową, ale student I roku może uznać, że czasem tempo wykładu jest za szybkie.

Matematyka dawna czy nowa?

Obowiązujący kanon wykształcenia matematycznego ogranicza się niemal wyłącznie do matematyki sprzed ponad 100 lat. Z nowszą matematyką student tej dyscypliny styka się jedynie na wykładach specjalistycznych bądź nielicznych wykładach inspirowanych nowszymi zastosowaniami (np. teoria grafów czy matematyka finansowa). Tak więc w gruncie rzeczy nasza książka poświęcona jest prawie w całości matematyce dawnej. Ale dawność dawności nierówna.

Gdzieś pomiędzy rokiem 1830 a 1880 matematyka zmienia swój charakter, przechodzi na wyższy poziom abstrakcji. W tym czasie pojawiają się nowe przestrzenie (geometria hiperboliczna, geometrie wielowymiarowe), nowe struktury algebraiczne (grupy, pierścienie i ciała), a niedługo później — wraz z powstaniem teorii mnogości i uznaniem aksjomatu wyboru — rośnie rola twierdzeń egzystencjalnych.

Funkcje i przestrzenie

Tematem I tomu są funkcje i przestrzenie. Już na ich przykładzie widać wyraźną różnicę pomiędzy raczej *konkretną* matematyką dawną a *abstrakcyjną* matematyką nową. Póki mówimy o funkcjach, a więc o matematyce sprzed roku 1830 możemy się skupić na *pojedynczych* obiektach takich, jak eksponenta, sinus, cosinus czy logarytm naturalny. Gdy przechodzimy do przestrzeni — czyli do matematyki II poł. XIX w. i XX w. — operujemy wyłącznie pojęciami *ogólnymi*. W algebrze liniowej sa to przede wszystkim przestrzenie i przekształcenia liniowe, w topologii — rozmaite klasy przestrzeni topologicznych i przekształcenia ciągłe.

Jak widać z powyższych uwag, pierwszy tom można traktować jako **łączony kurs** rachunku różniczkowego i całkowego jednej zmiennej, algebry liniowej i elementów topologii. Z wyraźnym naciskiem na motywację, na ogólne powiązania itd., kosztem sprawności rachunkowych.

Zarysowany tu podział na analizę, algebrę liniową i topologię nie jest ścisły. Na przykład liczby zespolone — temat zasadniczo algebraiczny — pojawią się w analizie, co pozwoli odkryć fascynujący związek pomiędzy eksponentą a funkcjami trygonometrycznymi. Aproksymacje — jeden z wiodących tematów przewodnich analizy powraca w algebrze. Przestrzenie metryczne (część topologii) pojawiają się już w algebrze. Takie sploty są nieuniknione, gdyż matematyka jest całością. W istocie całością wślizgującą się w fizykę, biologię, nauki społeczne itd., ale tych aspektów nie mogłem już pokazać.

Inny charakter ma drugi tom. Składa się on z serii prawie niezależnych minikursów kombinatoryki, teorii prawdopodobieństwa, teorii grup, teorii liczb, teorii grafów z elementami geometrii kombinatorycznej, geometrii nieeuklidesowej i teorii obliczeń. Czytając krótki, starannie umotywowany kurs o objętości 40-80 stron Czytelnik ma szanse zorientować się w charakterze wybranej dyscypliny.

Przy tak rozległej tematyce, a mocno ograniczonej objętości musiałem iść na poważne kompromisy nie tylko w doborze materiału, ale też w poziomie ścisłości. Często ograniczam się do szkicu dowodu, pomijam też sporo dowodów rutynowych nie wnoszących nowych idei.

Zadania

Zadania podstawowe — w większości niezbędne dla bezpiecznego posuwania się w głąb materiału — oddziela od zadań uzupełniających potrójny symbol karo. Te początkowe zadania ilustrują wprowadzane pojęcia, techniki czy twierdzenia. Większość jest stosunkowo prosta.

Dalsze zadania ilustrują związki wykładu z resztą materiału bądź pogłębiają rozumienie pojęć. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze (i ciekawsze).

Większości zadań towarzyszą odpowiedzi, wskazówki czy nawet pełne rozwiązania. Wyjątkiem są proste zadania rachunkowe; poprawność rozwiązania Czytelnik może sprawdzić za pomocą programu Wolfram Alpha® lub innego pokrewnego. Nie ma też odpowiedzi do zadań najtrudniejszych, z dwiema gwiazdkami. Przypominają one, że w prawdziwej matematyce nie zawsze mamy gotową odpowiedź w zasięgu ręki.

♢ ♢ ♢

Książka powstała na bazie *Markowych Wykładów z Matematyki*. Pracę nad nimi zacząłem w roku 2008, tak więc niniejsza książka jest ukoronowaniem 12 lat pracy. Przy tej okazji dziękuję raz jeszcze wszystkim, którzy pomagali mi w pracy nad tym cyklem, a także Czytelnikom, którzy zauważyli błędy czy potknięcia redakcyjne w moich książkach i przekazali je Wydawcy lub mnie osobiście. Książka zawdzięcza też wiele — często anonimowym — Internautom aktywnie działających na forum *Mathematics Stack Exchange*. Dzięki nim odkryłem wiele interesujących zadań i pomysłowych rozwiązań.

Jak pisałem we wstępie do *Analizy* wiele zawdzięczam dwóm wspaniałym książkom: *Approximately calculus* Shahriaria Shahriariego i *Excursions in calculus* Roberta M. Younga. Te dwie książki w znacznym stopniu kształtowały mój własny styl.

Przede wszystkim jednak chciałbym podziękować moim Kolegom-Wydawcom: Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczylasowi. Pierwszy z nich zajmował się głównie redakcją techniczną książki, w szczególności wykonał rysunki. Drugi zajmował się przede wszystkim redakcją merytoryczną i językową, bardzo wnikliwie przestudiował niemal końcową wersję książki, wychwytując niezamierzone nieścisłości, niekonsekwencje czy potknięcia językowe. Dzięki Ich wysiłkowi książka na pewno lepiej wygląda i przyjemniej ją się czyta.

Doświadczenie i teoria prawdopodobieństwa podpowiadają, że wiele innych błędów — mam nadzieję, że niegroźnych — pozostało. Oczywiście odpowiada za nie wyłącznie autor.

7 listopada 2020 Marek Zakrzewski

I

Liczby

Bóg stworzył liczby całkowite, wszystkie inne są dziełem człowieka.

Leopold Kronecker, wg Heinricha Webera
cyt. wg The MacTutor History of Mathematics
archive, http: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Jeszcze do niedawna matematykę definiowano jako naukę o liczbach i figurach. Żadne z tych dwu pojęć nie jest ścisłe. Zarówno rozumienie pojęcia liczby, jak i figury zmieniało się na przestrzeni wieków, ale można przyjąć, że współczesne rozumienie liczb ukształtowało się w II połowie XIX w. wraz z uściśleniem pojęcia liczby rzeczywistej (Dedekind), formalizacją liczb zespolonych (Hamilton) i odkryciem liczb kardynalnych (Cantor). Należy pewnie wspomnieć jeszcze o kwaternionach (Hamilton) i liczbach p-adycznych (Hensel).

Na poziomie elementarnym są dwa podstawowe rodzaje liczb: liczby **naturalne** określają liczebność zbioru, liczby **rzeczywiste** wyrażają miarę (np. długość). **Liczby kardynalne** są rozszerzeniem liczb naturalnych na zbiory nieskończone.

Na poziomie nieco bardziej zaawansowanym liczbami najbardziej naturalnymi okazują się **liczby zespolone**. Pojawią się one dopiero w wykładzie 25.

Najważniejszą własnością liczb naturalnych jest **zasada indukcji matematycznej**. Charakterystyczną własnością liczb rzeczywistych jest **zasada Archimedesa** czy też równoważny jej **lemat Cantora**. W kolejnych wykładach nie przedstawimy co prawda formalnej definicji ani liczb naturalnych, ani liczb rzeczywistych, ale pokażemy rolę obu tych fundamentalnych zasad.

Wykład 1

Liczby naturalne i zasada indukcji matematycznej

Twierdzenie matematyczne to końcowy produkt złożonego procesu. Najpierw trzeba jakąś prawidłowość czy zależność odkryć, potem doprecyzować, wreszcie udowodnić. W teorii liczb naturalnych najważniejszą, specyficzną techniką dowodzenia jest zasada indukcji matematycznej.

1.1 Odkrywanie wzorów i zasada indukcji

Odkrywanie wzorów - Zasada indukcji matematycznej - Sumowanie kwadratów - Sumy innych potęg - Średnie - Sumowanie kwadratów i objętość kuli - Zadania

Gdy siedmioletni Gauss miał obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 100, szybko odkrył, jak uniknąć rachunków. Powtórzmy jego rozumowanie. Wyobraźmy sobie te liczby wypisane raz w porządku rosnącym, a raz w porządku malejącym:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Suma liczb w każdej z kolumn jest równa 101. Kolumn jest 100, a więc dwukrotność szukanej sumy to $100 \cdot 101$. Zatem suma to $(100 \cdot 101)/2 = 5050$. W podobny sposób można pokazać, że

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pomysł ten znany był już w VIII w. uczonym z otoczenia Karola Wielkiego.

Odkrywanie wzorów

Załóżmy, że nie mamy żadnego pomysłu, jak wygląda wzór na sumę początkowych liczb naturalnych $S_n = 1+2+3+\ldots+n$. pójrzmy na kilka konkretnych przypadków.

Mamy kolejno 1, 3=1+2, 6=1+2+3 i dalej, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \ldots & ? \end{array}$$

Prawdopodobnie nie uda nam się odgadnąć tu żadnego ogólnego wzoru. W takiej sytuacji możemy nasz problem zmodyfikować. Zbadajmy podwojenie szukanej sumy:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & \ldots & ? \end{array}$$

Teraz mamy już spore szanse na odkrycie wzoru:

$$2 = 1\cdot 2,\quad 6 = 2\cdot 3,\quad 12 = 3\cdot 4,\quad 20 = 4\cdot 5,\quad 30 = 5\cdot 6,\quad 42 = 6\cdot 7,\ \ldots$$

Możemy *przypuszczać*, że podwojona suma S_n jest równa $n(n+1)$, a więc $S_n = [n(n+1)]/2$. Niestety, takie eksperymentalne podejście nie daje żadnej pewności, że hipoteza jest prawdziwa.

Wraz z rozwojem metod informatycznych coraz więcej ważnych odkryć uzyskiwanych jest eksperymentalnie za pomocą komputera. Ale dowód znajdujemy niemal zawsze metodami tradycyjnymi.

A oto kilka dalszych podobnych pytań:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1+3 & = & 4 \\ 1+3+5 & = & 9 \\ & \vdots & \\ 1+3+\ldots+(2n-1) & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1^3 & = & 1 \\ 1^3+2^3 & = & 9 \\ 1^3+2^3+3^3 & = & 36 \\ & \vdots & \\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
1\cdot 1! & = & 1\\
1\cdot 1!+2\cdot 2! & = & 5\\
1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3! & = & 23\\
1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4! & = & 119\\
 & \vdots & \\
1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! & = & ?
\end{array}$$

Zasada indukcji matematycznej

Rozważmy jakąkolwiek tożsamość $T(n)$ dotyczącą liczb naturalnych 0, 1, 2, 3, ... Aby przekonać się o jej prawdziwości, możemy zacząć od sprawdzenia, czy zachodzi ona dla początkowych liczb naturalnych:

$$T(0),\quad T(1),\quad T(2),\quad T(3),\quad T(4),\quad \ldots$$

W naukach przyrodniczych rozumowanie oparte na analizie części przypadków nazywa się *indukcją*. Czasem dla podkreślenia faktu, że nie obejmuje ona wszystkich przypadków nazywamy ją *indukcją niezupełną*. Sprawdzanie przypadków może wzmacniać naszą wiarę w prawdziwość twierdzenia, ale nie zastąpi dowodu.

Wyobraźmy sobie, że o tożsamości $T(n)$ umiemy pokazać coś więcej. Potrafimy wykazać, że prawdziwa jest tożsamość $T(0)$, a także wszystkie poniższe wynikania:

$$\begin{array}{ccc}
T(0) & \Longrightarrow & T(1)\\
T(1) & \Longrightarrow & T(2)\\
T(2) & \Longrightarrow & T(3)\\
T(3) & \Longrightarrow & T(4)\\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Skoro zachodzi $T(0)$ oraz wynikanie $T(0) \Longrightarrow T(1)$, to zachodzi też $T(1)$. Na mocy kolejnego wiersza zachodzi wówczas także $T(2)$ itd. W takim przypadku wykazalibyśmy oczywiście prawdziwość $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych, ale dowód taki trwałby nieskończenie długo.

Na szczęście w wielu przypadkach wszystkie dalsze wynikania można uzasadnić, postępując według tego samego schematu. A wówczas, zamiast nieskończenie wielu wynikań, wystarczy sprawdzić, że $T(0)$ oraz że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi wynikanie $T(k) \Longrightarrow T(k+1)$. Rozumowanie takie stanowi już kompletny dowód, a dotyczyć może nie tylko tożsamości, ale też innych własności liczb naturalnych. Punktem wyjściowym nie musi być liczba 0.

Twierdzenie 1.1 (zasada indukcji matematycznej)
Niech $T(n)$ będzie pewną własnością liczb naturalnych. Załóżmy, że:
1. dla pewnej liczby naturalnej n_0 zachodzi $T(n_0)$;
2. dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant n_0$ zachodzi wynikanie

$$T(k) \Longrightarrow T(k+1).$$

Wówczas własność $T(n)$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.

Zasada indukcji matematycznej nazywana była niegdyś zasadą *indukcji zupełnej*, gdyż w istocie sprawdza wszystkie przypadki.

Przykład 1.1 Za pomocą metody indukcji matematycznej wykaż tożsamość

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozwiązanie: Dowód składa się z dwu kroków.

1. Krok początkowy: Dla $n = 1$ tożsamość zachodzi, gdyż

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

2. Załóżmy, że tożsamość zachodzi dla **dowolnej ustalonej** liczby naturalnej k, tzn.

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Wykażemy, że zachodzi też dla $k + 1$, tzn.

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= [1 + 2 + \ldots + k] + (k+1) \stackrel{ind}{=\!=} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k\,(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Równość oznaczona znakiem *ind* pokazuje przejście, w którym skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego.

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że tożsamość prawdziwa jest dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych.

Dowody indukcyjne mogą wyglądać rozmaicie, ale ich zasadniczy schemat jest niemal zawsze taki sam. Zwróćmy jeszcze uwagę na wyróżnione słowa *dowolnej ustalonej*. Kto zastąpi te słowa słowami *dla wszystkich* zdradza, że nie rozumie metody. Zastanów się, dlaczego.

Zauważmy jeszcze, że indukcja matematyczna jest metodą *dowodzenia*. Jednak w żadnym stopniu nie podpowiada, jak odkryć dowodzone twierdzenie.

Sumowanie kwadratów

Spróbujmy teraz wyprowadzić wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \ldots$$

Naturalnym podejściem jest analiza konkretnych przypadków. Spójrzmy na początkowe sumy:

$$1^2 + 2^2 = 5, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30, \ldots$$

Chyba trudno odgadnąć tu jakąś prawidłowość.

Ponieważ znamy już wzór na sumę początkowych liczb naturalnych, więc spróbujmy porównać sumę kwadratów $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ z sumą $1 + 2 + .. + n$. Oto odpowiednie ilorazy:

$$\frac{1^2+2^2}{1+2} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = \frac{7}{3}, \qquad \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} = \frac{9}{3}, \ldots$$

Ostatni iloraz jest oczywiście równy 3, ale zapis w postaci ułamka pozwala łatwiej dostrzec ogólną prawidłowość:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n} = \frac{2n+1}{3}.$$

A stąd

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Osobną sprawą jest dowód tego wzoru. Standardowy dowód otrzymujemy za pomocą indukcji matematycznej. Inny podpowiadamy w zadaniu 14.

Sumy innych potęg

Wzór na sumę sześcianów odgadnąć jest bardzo łatwo:

$1^3+2^3=9=3^2, \quad 1^3+2^3+3^3=36=6^2, \quad 1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2, \ \ldots$

Gdy zauważymy, że $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$, to bez trudu sformułujemy hipotezę

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Równość tę łatwo udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Ogólny problem znalezienia wzoru na sumę

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$$

dla naturalnych wykładników k rozwiązał Jacob Bernoulli. Wzór ten (bez dowodu) przytaczamy w zadaniu 26.10.

Spójrzmy jeszcze na przypadek wykładników całkowitych ujemnych. Problem ma tu zupełnie inny charakter. Dla wykładnika $k=-1$ otrzymujemy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Sumę tę nazywamy **n-tą liczbą harmoniczną** (bądź **sumą harmoniczną**) i oznaczamy symbolem H_n. Dokładnego wzoru dla liczby H_n nie znamy. Ale szacowaniem sum takich jak powyższa, czy analogiczna dla odwrotności kwadratów, zajmiemy się w dalszych częściach książki.

Średnie

Powszechnie znana jest **średnia arytmetyczna** liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ określana wzorem

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Dla liczb dodatnich określamy **średnią geometryczną**

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\,,$$

a także **średnią harmoniczną**

$$H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

Wszystkie te średnie znane były już starożytnym Grekom.

Twierdzenie 1.2 (nierówność o średnich)
Pomiędzy średnią arytmetyczną A dowolnych liczb dodatnich, ich średnią geometryczną G oraz ich średnią harmoniczną H zachodzi podwójna nierówność

$$A \geqslant G \geqslant H.$$

Obie nierówności stają się równościami tylko, gdy wszystkie liczby są równe.

Wskazówkę, jak udowodnić tę nietrywialną nierówność dajemy w zadaniu 11.Mniej elementarne dowody podpowiadamy w zad. 11.5 oraz 13.11.

Spójrzmy na te średnie dla liczb $1, 2, \ldots, n$:

$$A = \frac{1+2+..+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2};$$

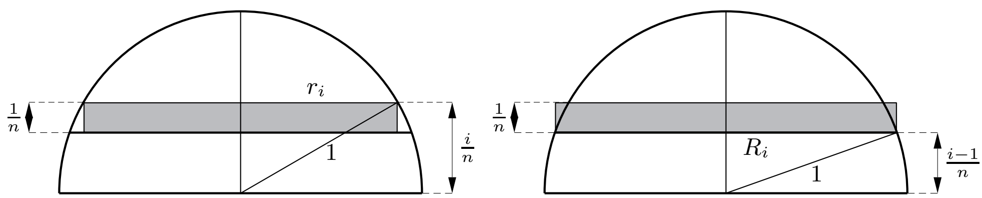
$$G = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \sqrt[n]{n!};$$

$$H = \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

W mianowniku średniej harmonicznej pojawia się wspomniana już wcześniej n-ta liczba harmoniczna. Gdy poznamy oszacowanie H_n, otrzymamy też pośrednio oszacowanie powyższej średniej harmonicznej. W zad. 20.2 dajemy też oszacowanie średniej geometrycznej tych liczb.

Sumowanie kwadratów i objętość kuli

Pokażemy teraz, jak wykorzystać wzór na sumę kwadratów do wyprowadzenia wzoru na objętość kuli. Zacznijmy od wyprowadzenia wzoru na objętość półkuli o promieniu 1.



Podzielmy półkulę na n plastrów o jednakowej wysokości. Objętość każdego z plastrów można oszacować porównując ją z objętością walca wpisanego w plaster i objętością walca na nim opisanego.

Każdy z walców ma wysokość $1/n$. Promienie walca wpisanego w i-ty plaster oraz walca na nim opisanego to odpowiednio

$$r_i = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad R_i = \sqrt{1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2}.$$

Ze wzoru na objętość walca wynika zatem, że objętość i-tego plastra opisanego jest równa

$$V_i = \pi \left[1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{n}.$$

Stąd otrzymujemy górne oszacowanie na objętość półkuli V:

$$V < \pi \left\{ \left[1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right] + \ldots + \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \right\} \cdot \frac{1}{n} =$$
$$= \pi \left[1 - \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}\right] = \pi \left[1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\right].$$

Podobnie możemy otrzymać oszacowanie dolne na V, porównując objętości plastrów z objętościami walców *wpisanych*.

Po prostych przekształceniach otrzymamy podwójną nierówność

$$\pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < V < \pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Pozostaje zauważyć, że gdy podział na plastry jest odpowiednio drobny (tzn. n dostatecznie duże) ułamki $1/n$ oraz $1/2n$ przyjmują wartości dowolnie bliskie zeru. Zatem obydwa wyrażenia ograniczające V zbliżają się dowolnie blisko do $2\pi/3$. Taka jest zatem objętość rozważanej półkuli. Stąd objętość kuli jednostkowej to $4\pi/3$.

Każde dwie kule są podobne. Skalą podobieństwa kuli o promieniu R do kuli jednostkowej jest stosunek ich promieni, czyli R. Stosunek ich objętości to R^3, skąd znany wzór na objętość kuli $V = 4\pi R^3/3$.

Zadania

1. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż tożsamości:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$

2. Odgadnij wzór na sumę i wykaż jego prawdziwość

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Wykaż, że dla $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność $2^n > n^2$.

4. Sprawdź, ze średnia geometryczna dwu liczb dodatnich jest średnią geometryczną ich średniej arytmetycznej i harmonicznej. Czy jest tak dla trzech i więcej liczb?

5. Pitagorejczykom zawdzięczamy spostrzeżenie, że w sześcianie liczba wierzchołków jest średnią liczby ścian i liczby krawędzi. O jakiej średniej tu mowa?

6. Sprawdź, że w ciągu $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ każdy wyraz jest średnią harmoniczną dwu sąsiednich.

7. Sprawdź, że zachodzi tożsamość

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2=k^3.$$

Wyprowadź stąd wzór na sumę sześcianów liczb naturalnych od 1 do n.

8. Wykaż nierówność o średnich dla $n=2$.

♢ ♢ ♢

9. Sprawdź, że zachodzi tożsamość

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{(a+b+c)}{2}\cdot\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Wywnioskuj stąd, że $(a^3+b^3+c^3)/3 \geqslant abc$, a następnie wyprowadź nierówność o średnich dla $n=3$.

10. Wykaż na dwa sposoby, że dla dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2:$$

a) korzystając z nierówności o średnich;
b) nie korzystając z niej.

11.* Wykaż, że średnia arytmetyczna n dodatnich liczb jest większa bądź równa ich średniej geometrycznej. Wywnioskuj stąd, że średnia geometryczna n liczb dodatnich jest większa bądź równa ich średniej harmonicznej.
Wsk.: Niech $T(n)$ oznacza nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla n liczb. Z zadania 12 wiemy, że zachodzi $T(2)$. Wykaż, że

$$T(n)\Longrightarrow T(2n)\quad\text{oraz}\quad T(n)\Longrightarrow T(n-1).$$

Wyjaśnij, dlaczego wynika stąd prawdziwość nierówności o średnich dla dowolnego naturalnego n.

1.2 Dwumian Newtona i Σ-notacja

Wzór dwumianowy Newtona - Σ-notacja - O jeden krok za daleko? - Zadania

Przypomnimy tu wzór dwumianowy Newtona i pokażemy jego interesujące uogólnienie na wykładniki niecałkowite.

Wzór dwumianowy Newtona

Wzór dwumianowy Newtona jest uogólnieniem znanych wzorów na kwadrat i sześcian sumy. Dla dowolnego wykładnika naturalnego n zachodzi równość

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Współczynniki dwumianowe mają naturalny sens na gruncie kombinatoryki (p. drugi tom tego kursu). Tam też łatwiej podać naturalny dowód wzoru Newtona. Tu współczynniki dwumianowe wprowadzimy formalnie, a dowód wzoru dwumianowego Newtona pozostawimy jako zadanie (p. zad. 12.).

Dla liczb naturalnych $0 \leqslant k \leqslant n$ współczynniki dwumianowe definiujemy wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. Przyjmujemy ponadto umowę, że $0! = 1$.

Σ-notacja

Powyższy zapis wzoru Newtona ma charakter nieformalny. Świadectwem nieformalności są kropki ... Ten nieformalny zapis można zastąpić zapisem bardziej formalnym i krótszym, stosując tzw. Σ-notację. Służy ona do zapisywania sum. Na przykład

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2, \qquad \sum_{k=3}^{n} k = 3 + 4 + \ldots + n.$$

Dolny indeks wskazuje, od którego wyrazu zaczynamy sumować, górny — na którym kończymy. Po znaku Σ dajemy ogólną postać składników.

W Σ-notacji wzór dwumianowy przyjmuje postać:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Podstawmy w tym wzorze $a = 1$ oraz $b = x$. Otrzymamy wówczas

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

W szczególności dla $x = 1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tak więc suma współczynników we wzorze Newtona jest równa 2^n.

O jeden krok za daleko?

Wzór dwumianowy dla naturalnych wykładników n znany był na długo przed Newtonem. Newton chyba jako pierwszy zastosował ten wzór dla wykładników innych niż naturalne. Rozważmy szczególny przypadek wzoru dwumianowego — wzór na $(1 + x)^n$ i zastosujmy go dla $n = 1/2$. Otrzymamy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$$

Na razie nie wiadomo, jak rozumieć ułamkowe współczynniki dwumianowe. Zauważmymy, że dla naturalnych n mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\dots(n-2)(n-1)n}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Wydaje się zatem rozsądnym przyjąć

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}, \dots$$

Uwzględniając kilka dalszych współczynników otrzymujemy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \dots$$

Tu pojawia się nowa trudność. Wszystkie kolejne współczynniki są różne od zera, a więc suma po prawej stronie składa się z nieskończenie wielu składników. W przyszłości przyjrzymy się takim sumom bliżej. Na razie przyjmijmy, że ograniczając się tylko do skończenie wielu składników otrzymujemy pewne przybliżenia. Na przykład

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{albo} \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

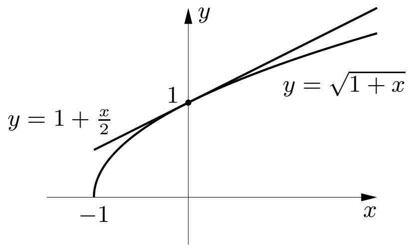
Te przybliżenia są dość dobre, gdy x są bliskie zera.

Ale dla $x = 1$ nawet drugie z tych przybliżeń daje tylko $\sqrt{2} \approx 1,375$. Aby otrzymać dość słabe przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,41$ trzeba wziąć kilkanaście składników. Nasz przybliżony wzór wyraźnie nie nadaje się do obliczania $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, gdyż 1 jest za daleko od zera.

Pierwsze z tych przybliżeń ma prostą interpretację geometryczną. W przyszłości przekonamy się, że prosta

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

jest styczną do wykresu $y = \sqrt{1+x}$ w punkcie $P = (0, 1)$.



Zadania

12. Udowodnij tożsamość Pascala

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Korzystając z tej tożsamości i zasady indukcji matematycznej wykaż wzór Newtona dla wykładników naturalnych.

13. Korzystając ze wzoru na $(1+x)^n$ wykaż, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

Wywnioskuj stąd, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}.$$

♢ ♢ ♢

14. Wykaż tożsamość

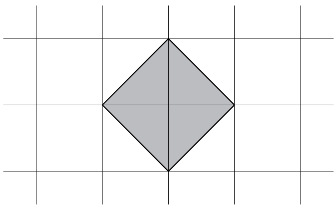
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

i wywnioskuj z niej wzór na sumę kwadratów. Wyprowadź w podobny sposób wzór na sumę sześcianów.

Wykład 2

Liczby rzeczywiste i lemat Cantora

Człowiek (o ile nie jest matematykiem!) w życiu codziennym używa wyłącznie liczb wymiernych. Ale przyglądając się na przykład poniższemu deseniowi odkryjemy, że duży kwadrat zbudowany na przekątnej d kwadratu jednostkowego ma pole 2. Zatem $d^2 = 2$, a więc $d = \sqrt{2}$. Zauważ, że długość przekątnej kwadratu wyznaczyliśmy nie korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



Już w V w. p.n.e. Grecy wiedzieli, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Niedługo później Eudoksos (390 p.n.e. - 337 p.n.e.) zbudował teoretyczne podstawy (dodatnich) liczb rzeczywistych. Jedno i drugie — odkrycie niewymierności i stworzenie teorii liczb rzeczywistych — wciąż zdumiewa. Żadna inna z wielkich cywilizacji nawet nie zbliżyła się do tego tematu, a matematycy europejscy odczuli potrzebę unowocześnienia systemu Eudoksosa dopiero w drugiej połowie XIX w., gdy współczesną teorię liczb rzeczywistych stworzył Richard Dedekind. Inne podejście do teorii liczb rzeczywistych zaproponował Georg Cantor.

W elementarnych wykładach ścisła teoria liczb rzeczywistych nie odgrywa istotnej roli. Odnotujemy tu jedynie najważniejsze nieoczywiste własności zbioru liczb rzeczywistych.

2.1 Liczby wymierne i niewymierne

Zbiór liczb wymiernych - Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ - Liczby rzeczywiste i rozwinięcia dziesiętne - Zadania

Skoro liczby mają służyć do mierzenia, to konieczne są ułamki. Już w Egipcie 4 000 lat temu operowano ułamkami biegle, w szczególności rozwinięto wyrafinowaną technikę przedstawiania liczb w postaci ułamków o liczniku 1, np.

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}, \qquad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Liczby ujemne pojawiły się zdumiewająco późno. Przyjmuje się, że wprowadzili je kupcy arabscy ok. VII w. n. e. Gdy w XIII w. Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim, pisał swoje traktaty matematyczne mógł już operować pełnym zbiorem liczb rzeczywistych.

Zbiór liczb wymiernych

W naszych rozważaniach pojawiać się będą cztery rodzaje liczb: naturalne, całkowite, wymierne i rzeczywiste. Zbiory tych liczb oznaczane są odpowiednio przez $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$. Symbol $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Q}_+$ oraz $\mathbb{R}_+$ oznaczają odpowiednie podzbiory liczb dodatnich.

Z matematycznego punktu widzenia zawsze jest istotne, jakie działania są wykonalne w danym zbiorze. W zbiorze liczb naturalnych wykonalne są dodawanie i mnożenie. Innymi słowy suma liczb naturalnych oraz iloczyn liczb naturalnych są liczbami naturalnymi. W zbiorze liczb całkowitych wykonalne jest także odejmowanie, w zbiorze liczb wymiernych wszystkie cztery podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (oczywiście z wyjątkiem dzielenia przez zero).

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$

Jednak w matematyce bardzo szybko okazuje się, że musimy też pierwiastkować, a wówczas pojawiają się liczby niewymierne. Nasuwa się pytanie: skąd wiemy, że liczby takie, jak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ itd są niewymierne. Przypomnijmy standardowe rozumowanie.

Załóżmy, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

gdzie p, q dodatnie liczby naturalne, a ułamek p/q jest nieskracalny.

Wówczas $p^2 = 2q^2$. Zatem p^2, a więc także p dzieli się przez 2. Niech $p = 2m$, wówczas mamy $(2m)^2 = 2q^2$, skąd $q^2 = 2m^2$. Tak więc również q dzieli się przez 2, wbrew założeniu, że ułamek p/q jest nieskracalny. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Podobnie dowodzi się, że $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną dla dowolnej liczby pierwszej p. Nieco modyfikując to rozumowanie można też wykazać, że $\sqrt{n}$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem liczby naturalnej.

Liczby rzeczywiste i rozwinięcia dziesiętne

Przypomnijmy, że każda liczba rzeczywista ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, np.

$$\frac{1}{2} = 0,5000\,00000\,\ldots \qquad \frac{1}{3} = 0,3333\,33333\ldots, \qquad \pi = 3,14159\,26535\ldots$$

Oczywiście $1/2 = 0,5$, ale daliśmy rozwinięcie nieskończone, aby pokazać jednolitość zapisu.

To przedstawienie nie jest jednoznaczne, np. $1,00000\ldots = 0,99999\ldots$ Proste uzasadnienie tej równości pojawi się w wykładzie 4.

Przypomnijmy jeszcze, że rozwinięcia liczb wymiernych są skończone lub okresowe (okres nie musi zaczynać się bezpośrednio po przecinku), a rozwinięcia liczb niewymiernych są nieokresowe.

Zadania

1. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej p liczby $\sqrt{p}$ oraz $\sqrt[3]{p}$ są niewymierne.

2. Wykaż, że każda z poniższych liczb jest niewymierna:

a) $1 + \sqrt{2}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$; d) $\log_2 3$.

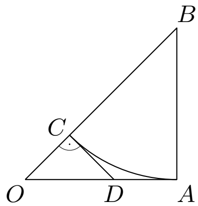
◇ ◇ ◇

3. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ liczba $\log_2 n$ jest albo liczbą naturalną albo niewymierną.

4. Wykaż niewymierność cosinusa kąta: a) $15°$; b) $20°$; c)* $1°$.

5. Oblicz $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. Pokaż, że istnieją liczby niewymierne a, b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

6. W roku 2000 Tom Apostol przedstawił nowy dowód niewymierności $\sqrt{2}$.



Załóżmy, że $\sqrt{2} = p/q$, zatem $p^2 = q^2 + q^2$. Wynika stąd, że istnieje równoramienny trójkąt prostokątny o bokach całkowitych. Niech OAB będzie najmniejszym takim trójkątem.

Okrąg o środku B i promieniu AB przecina przeciwprostokątną w punkcie C. Styczna do okręgu poprowadzona w punkcie C przecina przyprostokątną w punkcie D.
a) uzasadnij, że odcinki CO i CD mają długość całkowitą;
b) to samo dla odcinka OD.
Wywnioskuj stąd sprzeczność z założeniem.

2.2 Kresy i lemat Cantora

Zasada Archimedesa i lemat Cantora - Zbiory ograniczone i kresy - Gęstość $\mathbb{Q}$ - Zadania

Trzy własności zbioru liczb rzeczywistych decydują o jego szczególnej roli w matematyce:

— możliwość wykonywania czterech podstawowych działań;
— możliwość porównywania liczb;
— nieobecność „dziur".

Pierwsza własność ma charakter algebraiczny, druga porządkowy. Zauważmy, że porządek na $\mathbb{R}$ jest zgodny z działaniami: nierówności można dodawać i mnożyć stronami przez liczbę dodatnią.

Trzecia własność ma charakter geometryczny. Ten brak luk to zasadnicza własność, która odróżnia zbiór liczb wymiernych od zbioru liczb rzeczywistych. W przyszłości zobaczymy, że ten rodzaj geometrii w istocie wiąże się z topologią, dlatego często mówi się w tym kontekście o topologii prostej.

Nieobecność dziur oznacza, że oś liczbowa jest linią ciągłą. Pojęcie linii ciągłej niełatwo ściśle zdefiniować, ale w praktyce wystarczy, gdy temu trzeciemu warunkowi nadamy ścisły sens.

Zasada Archimedesa i lemat Cantora

„Prosta" złożona z samych punktów wymiernych składa się niemal wyłącznie z „dziur". Uzupełniając zbiór $\mathbb{Q}$ o liczby niewymierne wypełniamy te luki.

Intuicyjne przekonanie, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma dziur wyrazić można ściśle na wiele sposobów. Dwa najczęściej spotykane to zasada Archimedesa i lemat Cantora.

Zasada Archimedesa głosi, że dla dowolnej dodatniej liczby a istnieje liczba naturalna n taka, że $na > 1$. Wydaje się ona bardzo oczywista, ale chyba nie od razu widać, że ma ona jakiś związek z ciągłością prostej.

Ideę braku luk lepiej wyraża poniższy lemat:

LEMAT 2.1 (Cantora o przedziałach zstępujących)
Niech $I_n \subset R$, $n \in N$ będzie ciągiem domkniętych ograniczonych przedziałów, przy czym

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

Jeżeli długości przedziałów dążą do zera, to część wspólna tych przedziałów składa się dokładnie z jednej liczby.

Jeżeli wyrażenie „długości dążą do zera" nie jest intuicyjnie jasne, warto do tego miejsca wrócić po lekturze wykładu 3.

Dowodzi się, że zasada Archimedesa i lemat Cantora są równoważne. Zazwyczaj zasada Archimedesa przyjmowana jest jako aksjomat charakteryzujący $\mathbb{R}$, a lemat Cantora jest z niej wyprowadzany. Poniżej pokazujemy ważne zastosowania obu tych własności.

Zbiory ograniczone i ich kresy

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczonym**, jeżeli istnieją liczby m oraz M takie, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi podwójna nierówność

$$m \leqslant x \leqslant M.$$

Liczby m i M nazywamy odpowiednio **ograniczeniem** dolnym i górnym zbioru A. Zauważ, że zbiór ograniczony ma nieskończenie wiele ograniczeń. Np. ograniczeniem górnym przedziału $[0, 1]$ jest dowolna liczba $M \geqslant 1$. Najmniejsze spośród wszystkich ograniczeń górnych zbioru nazywamy jego **kresem górnym**, największe spośród ograniczeń dolnych — **kresem dolnym**.

Rozważmy zbiór $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, czyli część wspólną zbioru $\mathbb{Q}$ i przedziału $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Jego kresem górnym jest $\sqrt{2}$, kresem dolnym $-\sqrt{2}$. Zauważ, że kres zbioru złożonego z liczb wymiernych może być liczbą niewymierną. Jest to konsekwencją istnienia luk w zbiorze $\mathbb{Q}$.

Poniższe twierdzenie pokazuje, iż takie przypadki w zbiorze $\mathbb{R}$ nie mogą się zdarzyć.

TWIERDZENIE 2.1 *Każdy niepusty podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z góry (z dołu) ma w zbiorze liczb rzeczywistych kres górny (odpowiednio dolny).*

Twierdzenie to jest w istocie równoważne lematowi Cantora. My wykażemy jedynie, że jest jego konsekwencją.

Dowód: Niech A będzie ustalonym niepustym zbiorem ograniczonym. Zdefiniujemy zstępujący ciąg przedziałów $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ Niech $I_0 = [a_0, b_0]$, gdzie $a_0 \in A$, b_0 jakiekolwiek jego ograniczenie górne. Niech c będzie środkiem przedziału I_0. Jeżeli $c \in A$, to przyjmijmy $a_1 = c$, $b_1 = b_0$; w przeciwnym razie przyjmijmy $a_1 = a_0$, $b_1 = c$. Niech $I_1 = [a_1, b_1]$. Podobnie określamy kolejne przedziały. Na mocy lematu Cantora część wspólna tych przedziałów zawiera dokładnie jeden punkt. Nietrudno uzasadnić, że jest on najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A, czyli jego kresem.

Dowód dla kresu dolnego jest analogiczny.

Gęstość $\mathbb{Q}$

Pokażemy, że każdy niepusty przedział otwarty (a, b) zawiera liczbę wymierną. Własność tę formułuje się często inaczej: zbiór liczb wymiernych jest **gęsty** w $\mathbb{R}$. To samo odnosi się do liczb niewymiernych, ale rzadziej jest istotne.

Na mocy zasady Archimedesa istnieje $n \in \mathbb{N}$ taka, że $n(b - a) > 1$, zatem

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Posuwając się od zera krokiem długości $1/n$ otrzymujemy liczby $1/n$, $2/n$, $3/n, \dots$ (albo przeciwne do nich). Ponieważ długość kroku jest mniejsza niż długość przedziału, więc któraś z tych liczb należy do przedziału (a, b).

Zadania

7. Znajdź kresy poniższych zbiorów:

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$; b) $B = \{\frac{k}{k+m} : k, m \in \mathbb{N}_+\}$; c) $C = \{\frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

8. Wykaż, że każdy niepusty przedział otwarty zawiera nieskończenie wiele liczby wymiernych i nieskończenie wiele liczb niewymiernych.

9. Pokaż, że w lemacie Cantora założenie ograniczoności i domkniętości przedziałów jest istotne. Dokładniej: pokaż, że gdy przedziały są tylko otwarte albo tylko ograniczone, to ich część wspólna może być pusta.

◊ ◊ ◊

10. Dla zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ określmy $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Znajdź:

a) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; c) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

11. Wiedząc, że kresami zbioru $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ są liczby 1 oraz -1 uzasadnij, że takie same kresy ma zbiór $\{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$.

Wykład 3

Ciągi i granice

Do niedawna uważano, że pojęcie granicy stanowi granicę pomiędzy matematyką elementarna a wyższą. Trochę to się zmieniło, ale nadal jest to jedno z kluczowych pojęć dających dostęp do początków matematyki wyższej.

3.1 Intuicje i rachunki

Pojęcie granicy i najprostsze przypadki - Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne - Twierdzenie o trzech ciągach i zbieżność pierwiastków - Zadania

Formalna definicja granicy ciągu pojawiła się przynajmniej 2000 lat później niż samo pojęcie. Nie słyszeli o niej ani Archimedes, ani Newton czy Euler. Zaczniemy zatem od intuicji, a ścisłe określenie pojawi się wkrótce,

Pojęcie granicy i najprostsze przykłady

Przy n dążącym do nieskończoności wyrazy ciągu $a_n = 1/n$ stają się dowolnie bliskie zera. Zapisujemy to za pomocą symbolu granicy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ogólnie, jeżeli wraz ze wzrostem n (gdy n dąży do nieskończoności) wyrazy ciągu a_n stają się dowolnie bliskie pewnej skończonej liczbie g, to mówimy, że ciąg a_n **ma granicę** g albo że **jest zbieżny do** g. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{albo krócej} \quad a_n \to g.$$

Gdy mówimy o zbieżności ciągów, to zawsze zakładamy, że n *dąży do nieskończoności*, nawet gdy nie jest to zaznaczone.

Wychodząc od prostych, oczywistych granic, możemy obliczać granice ciągów bardziej skomplikowanych. Obliczmy granicę ciągu $a_n = (3n+1)/(2n+5)$. W tym celu podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

Korzystaliśmy tu z intuicyjnej własności granicy ciągów: granicą ilorazu dwu ciągów jest ilorazem ich granic. Analogiczne własności zachodzą też dla granic sumy, różnicy i iloczynu ciągów.

Twierdzenie 3.1 (arytmetyka granic)
Załóżmy, że ciągi a_n oraz b_n mają granice odpowiednio a, b. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Jeżeli ponadto $b \neq 0$, to także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne

Przyjrzyjmy się ciągom geometrycznym $a_n = (1/2)^n$ oraz $b_n = (-2/3)^n$:

$$1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16, \ldots \qquad -2/3,\ 4/9,\ -8/27, 16/81, \ldots$$

Intuicyjnie jest jasne, że obydwa dążą do zera. Można wykazać, że te intuicje są trafne. Odnotujmy zatem to spostrzeżenie jako osobne twierdzenie.

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny q^n jest zbieżny do zera.*

Nie każdy ciąg ma granicę. Na przykład ciąg $a_n = (-1)^n$ ma wyrazy na przemian -1 oraz 1, więc nie ma żadnej liczby, do której zbliżałyby się te wyrazy. Podobnie jest z ciągiem $a_n = (-2)^n$, który oscyluje pomiędzy coraz większymi liczbami dodatnimi i coraz większymi (co do wartości bezwzględnej) liczbami ujemnymi. Ciągi, które nie mają skończonej granicy, nazywamy **rozbieżnymi**.

Pośród ciągów rozbieżnych na osobną uwagę zasługują dwa szczególne typy. Ciągi takie, jak np. $a_n = n^2$ czy $b_n = 2^n$ dążą do plus nieskończoności. Symbolicznie zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Z kolei ciągi takie, jak $a_n = -n$ czy $b_n = -2^n$ dążą do minus nieskończoności. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty.$$

Takie nieskończone granice nazywamy **niewłaściwymi**, a o samych ciągach mówimy, że są **rozbieżne** do plus albo minus nieskończoności. Poniższą własność takich ciągów wykorzystujemy w wielu obliczeniach.

TWIERDZENIE 3.3 *Jeżeli ciąg $|a_n|$ jest rozbieżny do nieskończoności, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Rzeczywiście, jeżeli wartości $|a_n|$ wraz ze wzrostem n przyjmują dowolnie duże wartości dodatnie, to ich odwrotności $1/|a_n|$ stają się dowolnie bliskie zera. A wówczas także ciąg $1/a_n$ dąży do zera.

PRZYKŁAD 3.1 Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

ROZWIĄZANIE: Zastosowanie twierdzenia o granicy różnicy ciągów nie jest tu możliwe, gdyż ani ciąg $\sqrt{n^2+n}$, ani ciąg n nie mają granicy skończonej. Aby wyznaczyć granicę tego ciągu, przekształćmy go korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że z pozoru oczywiste podejście

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \infty - \infty,$$

dałoby **błędny** wynik zero. Na ogół nie można stosować twierdzeń o arytmetyce granic dla granic nieskończonych. Dwa najważniejsze wyjątki to: suma oraz iloczyn ciągów rozbieżnych do ∞ też jest ciągiem rozbieżnym do ∞.

Twierdzenie o trzech ciągach i zbieżność pierwiastków

Następujące twierdzenie jest dość oczywiste, ale bardzo użyteczne:

TWIERDZENIE 3.4 (o trzech ciągach)
Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

to ta wspólna granica jest też granicą ciągu b_n.

Pokażemy, jak za pomocą tego twierdzenia wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Niech $\sqrt[n]{2} = 1 + r_n$. Wówczas $r_n > 0$. Pozostaje wykazać, że $r_n \to 0$. Przypomnijmy początek wzoru Newtona dla $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots$$

Zatem

$$2 = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = (1+r_n)^n = 1 + nr_n + \ldots > 1 + nr_n,$$

gdyż dla dodatniego r_n wszystkie dalsze wyrazy też są dodatnie. Tak więc $1 > nr_n$, skąd

$$0 < r_n < \frac{1}{n}.$$

Ponieważ skrajne ciągi dążą do zera, więc także r_n dąży do zera, a stąd

$$\sqrt[n]{2} = 1 + r_n \to 1 + 0 = 1.$$

W podobny sposób można udowodnić, że zachodzi poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.5 *Dla dowolnego dodatniego* a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Zadania

1. Oblicz granice ciągów

a) $a_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{1+2+\ldots+2n}$; b) $b_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$.

2. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2+2n} - n$; c) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{5^n}$.

3. Niech L_n oraz S_n oznaczają odpowiednio obwód i pole n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.
a) Podaj granice obu ciągów. Nie wykonuj żadnych rachunków!
b) Wywnioskuj stąd granicę ciągu $a_n = 2n\sin(\pi/n)$.

4. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$; b) $b_n = \sqrt[n]{1 + 2 + \ldots + n}$.

♢ ♢ ♢

5. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Mówimy, że funkcja $f(n)$ jest **asymptotycznie rzędu mniejszego** niż $g(n)$, gdy granica ich ilorazu przy $n \to \infty$ jest równa zeru. Gdy granica ta jest skończona i różna od zera, to mówimy, że funkcje $f(n)$ i $g(n)$ są **asymptotycznie tego samego rzędu**. Wykaż, że:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ jest rzędu n^3; b) n^3 jest rzędu niższego niż 2^n.

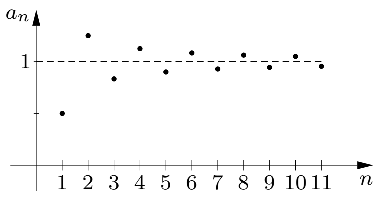
3.2 Trochę teorii i algorytm Herona

Formalne pojęcie granicy ciągu - Zbieżność i ograniczoność - Heron, rekursja i pierwiastki - Zadania

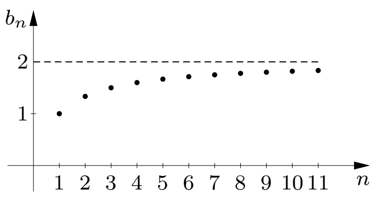
Pokażemy tu, dlaczego w niektórych rachunkach istotną rolę odgrywają *twierdzenia o istnieniu.* A ponadto poznamy zdumiewająco prosty algorytm obliczania pierwiastków, znany Heronowi (I w. n.e.), a możliwe, że nawet Babilończykom — 4000 lat temu.

Formalne pojęcie granicy

Zaczniemy jednak od ścisłego określenia granicy ciągu. Poniżej widzimy wykresy przykładowych ciągów zbieżnych. Zwróć uwagę, że punkty (n, a_n) odpowiadające kolejnym wyrazom ciągu zbliżają się do przerywanej linii odpowiadającej granicy ciągu.



Ciąg $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$ ma granicę 1.



Ciąg $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$ ma granicę 2.

Przyjrzyjmy się pierwszemu z nich. Zauważ, że wyrazy ciągu leżą coraz bliżej linii odpowiadającej jego granicy $g = 1$. Algebraicznie oznacza to, że odległość pomiędzy wyrazem a_n a granicą ciągu, czyli wartość wyrażenia $|a_n - g|$ zbliża się do zera. W tym konkretnym przypadku mamy

$$|a_n - g| = \left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2n}.$$

Widzimy, że dla $n \geqslant 3$ różnica ta jest mniejsza od $1/5$. Z kolei wyrazy o numerach $n \geqslant 6$ różnią się od granicy o mniej niż $1/10$. Rozważaną dokładność (w pierwszym przypadku $1/5$, w drugim $1/10$) tradycyjnie oznaczamy grecką litera ε (czyt. epsilon). Zauważ, że w obu przypadkach nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich wyrazów ciągu oprócz skończenie wielu. Mówimy, że zachodzi ona dla **prawie wszystkich** wyrazów tego ciągu.

Mówimy, że liczba g jest **granicą ciągu** a_n przy $n \to \infty$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów ciągu.

W naszym przykładzie nierówność $|a_n - g| = 1/2n < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich wyrazów spełniających warunek $n > 1/2\varepsilon$. Zatem dla każdego ustalonego ε nierówność tę spełniają prawie wszystkie wyrazy ciągu, tak więc istotnie liczba 1 jest granicą rozważanego ciągu.

Podobnie można zdefiniować zbieżność do granic niewłaściwych. Mówimy, że ciąg a_n jest **rozbieżny do plus (minus) nieskończoności**, jeżeli dla dowolnego M prawie wszystkie jego wyrazy są większe (odp. mniejsze) od M.

Zbieżność a ograniczoność

Mówimy, że ciąg a_n jest **ograniczony**, jeżeli wszystkie jego wyrazy leżą w przedziale $[m, M]$. Liczby m oraz M nazywamy ograniczeniem dolnym (odp. górnym) ciągu a_n.

Zauważ, iż zbieżność ciągu geometrycznie oznacza, że dalekie wyrazy ciągu leżą *w pobliżu* pewnej prostej. Ograniczoność oznacza tylko, że wyrazy ciągu mieszczą się w pewnym *pasie* ograniczonym prostymi. Tak więc zbieżność jest warunkiem mocniejszym niż ograniczoność, co wyraża poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.6 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód: Niech g będzie granicą ciągu a_n. Z definicji granicy wynika, że prawie wszystkie jego wyrazy leżą w przedziale $(g-1, g+1)$. Niech N będzie numerem ostatniego wyrazu, nie leżącego w tym przedziale. Wówczas liczby

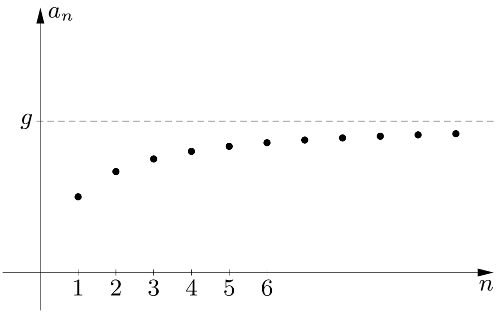
$$M = \max(a_1, a_2, \ldots, a_N, g + 1), \qquad m = \min(a_1, a_2, \ldots, a_N, g - 1)$$

są odpowiednio górnym i dolnym ograniczeniem ciągu a_n.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, o czym świadczy ciąg $a_n = (-1)^n$ — jest ograniczony, ale nie jest zbieżny. Zachodzi jednak twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 3.7 *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

DOWÓD: Ideę dowodu przedstawia rysunek.



Załóżmy, że ciąg jest rosnący. Niech M będzie jego kresem, czyli najmniejszym ograniczeniem górnym. Weźmy ustalone $\varepsilon > 0$. Skoro g jest ograniczeniem najmniejszym, to pewien wyraz a_N spełnia nierówność $g - \varepsilon < a_N \leqslant g$. Ponieważ ciąg jest rosnący, więc te same nierówności spełniają wszystkie dalsze wyrazy ciągu. Tak więc dla prawie wszystkich wyrazów zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, zatem ciąg a_n ma granicę g.

Zauważ, że w dowodzie skorzystaliśmy z twierdzenia o istnieniu kresu, więc pośrednio z lematu Cantora.

Heron, rekursja i pierwiastki

Jak już wspominaliśmy, pomysłowy algorytm obliczania pierwiastków kwadratowych znany był już Heronowi, prawie dwa tysiące lat temu. W literaturze znany jest jako *algorytm Herona* bądź *algorytm babiloński*, gdyż istnieją poszlaki (dość słabe), że mogli go znać już Babilończycy.

Obliczmy tą metodą $\sqrt{2}$. Algorytm Herona polega na wyznaczaniu kolejnych wyrazów ciągu zadanego warunkami

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}.$$

Sama idea tego algorytmu jest prosta: gdy wyraz a_n przybliża $\sqrt{2}$ od dołu, to $2/a_n$ przybliża go od góry. Okazuje się, że wyraz a_{n+1} będący średnią arytmetyczną tych dwu liczb jest przybliżeniem (dużo!) lepszym niż poprzednie.

Skąd wiemy, że w granicy musimy dostać rzeczywiście $\sqrt{2}$. Na razie załóżmy, że granica istnieje i jest równa g. Wówczas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \to \frac{g + \frac{2}{g}}{2}.$$

Ale $a_{n+1} \to g$, gdyż a_{n+1} jest to ciąg a_n przesunięty o jeden wyraz. Zatem

$$g = \frac{g + \frac{2}{g}}{2}.$$

Mnożąc obie strony przez $2g$ otrzymamy $2g^2 = g^2 + 2$, skąd $g^2 = 2$. Ponieważ ciąg o wyrazach dodatnich nie może mieć granicy ujemnej, więc $g = \sqrt{2}$.

Poprawność rachunków wymaga uzasadnienia, że ciąg ten ma granicę. W tym celu pokażemy, że jest on ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$ i malejący.

1. Ciąg jest ograniczony z dołu.

Zauważmy, że $(a_n - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$, skąd po rutynowych przekształceniach

$$\frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \geqslant \sqrt{2}.$$

A stąd

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \geqslant \sqrt{2}.$$

Oczywiście także $a_1 = 2 \geqslant \sqrt{2}$.

2. Ciąg jest malejący.

Korzystając z nierówności $a_n > \sqrt{2}$ pokażemy, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest ujemna:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} - a_n = \frac{\frac{2}{a_n} - a_n}{2} = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} < 0.$$

Zadania

7. Korzystając z definicji granicy wykaż, że granicą ciągu $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ jest liczba 2.

8. Zmodyfikuj algorytm Herona tak, aby w granicy otrzymać $\sqrt[3]{2}$.

9. Znajdź granicę ciągu zadanego rekurencją $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Granicę tę zapisuje się niekiedy w postaci

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}.$$

◊ ◊ ◊

10.* Wykaż, że ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest ograniczony z góry i rosnący, a więc zbieżny. Stałą e definiuje się zazwyczaj jako liczbę będąca granicą tego ciągu, ale u nas e pojawi się naturalnie w kontekście równań różniczkowych.
Wsk.: Dla dowodu monotoniczności rozważ liczbę 1 oraz n innych liczb i skorzystaj z nierówności o średnich.

3.3 Liczba π

Dwa klasyczne wzory - Od Egipcjan do Archimedesa - Jak to robił Archimedes? - Zadania

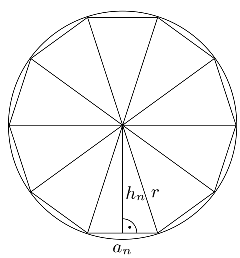
Liczbę π określa się jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Jest jedną z dwu (obok liczby e) najważniejszych stałych w matematyce. Każdy algorytm jej obliczania wykorzystuje przejścia graniczne.

Dwa klasyczne wzory

Z samej definicji π wynika, że pomiędzy obwodem L okręgu, a jego średnicą $2r$ zachodzi zależność $L/2r = \pi$, skąd znany wzór na obwód okręgu

$$L = 2\pi r.$$

Koło można przybliżać za pomocą wpisanych wielokątów foremnych. Każdy taki wielokąt dzieli się na n trójkątów równoramiennych, o podstawie a_n oraz wysokości h_n. Wraz z n dążącym do nieskończoności, iloczyn na_n dąży do obwodu okręgu, a wysokość h_n do jego promienia.



Zatem pole koła o promieniu r jest równe

$$P = \lim_{n\to\infty} n\frac{a_n h_n}{2} = \lim_{n\to\infty} na_n\frac{h_n}{2} = L\frac{r}{2} = 2\pi r\frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Obydwa wzory mają praktyczną wartość pod warunkiem, że znamy wartość π z odpowiednią dokładnością. Dziś odczytamy ją z dowolnego kalkulatora: $\pi \approx 3,141592654$, a Wolfram Alpha® poda ją z dokładnością do 1000 miejsc po przecinku. Ale uzyskanie nawet kilku miejsc po przecinku nie jest zadaniem trywialnym.

Od Egipcjan do Archimedesa

Przybliżoną wartość π można wyznaczyć porównując obwód okręgu z obwodem wielokąta foremnego wpisanego w ten okrąg bądź na nim opisanego. Można zakładać, że okrąg ma promień 1. Wpisując w taki okrąg sześciokąt foremny otrzymujemy oczywiste szacowanie $2\pi > 6$, skąd $\pi > 3$. To najprostsze przybliżenie $\pi \approx 3$ pojawia się w Biblii (II Ks. Kronik 4:2, *Biblia Tysiąclecia*).

Egipcjanie wyrażali pole koła za pomocą średnicy $d = 2r$. W dzisiejszej symbolice:

$$P \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2,$$

co odpowiada wartości $\pi \approx 3,16$. Obwód sześciokąta foremnego *opisanego* wynosi $4\sqrt{3}$. Łącząc to szacowanie z szacowaniem biblijnym otrzymamy

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

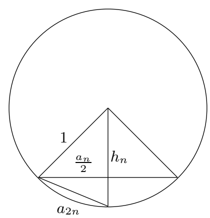
Wartość średnia tych ograniczeń to około 3,232051. Ale już w III w. p.n.e. Archimedes otrzymał szacowanie dokładniejsze

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Wartość średnia obu ograniczeń to 3,14185.

Jak to robił Archimedes?

Spójrzmy, jak otrzymać szacowanie Archimedesa. W tym celu wyznaczymy najpierw zależność pomiędzy bokiem foremnego $2n$-kąta wpisanego w okrąg o promieniu 1, a bokiem analogicznego n-kąta.



Oznaczmy przez a_n oraz h_n odpowiednio bok i wysokość trójkąta w n-kącie foremnym. Wówczas

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (1-h_n)^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - 2h_n + h_n^2.$$

A ponieważ $h_n^2 = 1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$, więc

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - 2h_n + 1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = 2 - 2h_n = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}.$$

Zatem

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Bok sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy to $a_6 = 1$. Z powyższego wzoru otrzymujemy $a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,5176381$. Przybliżenie obwodu koła za pomocą 12-kąta foremnego odpowiada zatem przybliżeniu $2\pi \approx 12a_{12}$, skąd $\pi \approx 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3,105828$.

Wychodząc od a_{12} otrzymamy kolejno a_{24}, a_{48} oraz a_{96}. Ta ostatnia wartość pozwala uzyskać dolne szacowanie Archimedesa. W podobny sposób, analizując wielokąty opisane, otrzymamy szacowanie górne.

Zadania

11. Oblicz obwód sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1.

12. Przyjmijmy $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Można wykazać, że oba ciągi mają wspólną granicę π. Oblicz wyrazy a_1 oraz b_1.

3.4 Archimedes

Archimedes (ok. 287 p.n.e. - 212 p.n.e.), powszechnie uchodzi za największego matematyka starożytności. Niemal całe życie spędził w Syrakuzach na Sycylii (w owym czasie była to grecka kolonia), choć przez jakiś czas przebywał prawdopodobnie w Aleksandrii — najważniejszym centrum naukowym epoki. Tam mógł spotkać Eratostenesa i innych następców Euklidesa. Zginął z ręki rzymskiego żołnierza podczas oblężenia Syrakuz. Archimedes przeszedł też do historii jako wielki wynalazca (m.in. śruba Archimedesa) i oczywiście fizyk (*Eureka!*).

Jego dorobek matematyczny obejmuje m.in. wspomnianą w tekście metodę przybliżania π, obliczenie pola odcinka paraboli, a przede wszystkim odkrycie metody obliczania objętości kuli. Archimedes odkrył tę metodę za pomocą bardzo finezyjnego rozumowania, wykorzystując prawo dźwigni. Później, w rozprawie *O kuli i walcu* dał ścisłe, geometryczne wyprowadzenie swojej metody pokazując, że objętość kuli to 2/3 objętości opisanego na niej walca. Wynik ten był dla Archimedesa źródłem szczególnej dumy. Archimedes życzył sobie, aby motyw kuli wpisanej w walec umieścić na jego grobie. Grób taki widział w Syrakuzach jeszcze Cyceron około roku 75 p.n.e.

Wykład 4

Szeregi geometryczne, ułamki łańcuchowe i reprezentacja liczb rzeczywistych

Jak już zauważyliśmy wcześniej

$$1 = 0,999\dots$$

Ścisłe uzasadnienie tej równości wykorzystuje szeregi geometryczne. Zajmiemy się nimi w pierwszej części wykładu. Ale równość ta uświadamia nam pewną słabość standardowego zapisu liczb rzeczywistych: niektóre liczby mają dwa różne zapisy. Za pomocą ułamków łańcuchowych zaproponujemy inny sposób zapisu, wolny od tej wady.

4.1 Szeregi geometryczne i liczby rzeczywiste

Suma szeregu geometrycznego - Szeregi a rozwinięcia dziesiętne - Wymierna czy niewymierna? - Zadania

Szeregami zajmiemy się bliżej w wykładach 22-26. Tu ograniczymy się do szeregu geometrycznego. Za jego pomocą zrozumiemy, dlaczego liczby wymierne mają rozwinięcia okresowe albo skończone, a liczby niewymierne — rozwinięcia nieokresowe.

Suma szeregu geometrycznego

Rozważmy **szereg geometryczny**

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots,$$

gdzie a oraz q ustalone.

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy n-tą sumę częściową:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Przypomnijmy, że dla $|q| < 1$ ciąg q^n jest zbieżny do zera, więc

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{a}{1-q}.$$

Przy założeniu, że $|q| < 1$ suma $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nieskończonego szeregu geometrycznego wyraża się zatem wzorem

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

W świetle powyższego, szereg geometryczny o ilorazie $|q| < 1$ jest zbieżny. Dla pozostałych wartości q, tzn. gdy $|q| \geqslant 1$, szereg geometryczny jest rozbieżny (pomijając trywialny przypadek $a = 0$).

Szeregi a rozwinięcia dziesiętne

W gruncie rzeczy z szeregami stykamy się od dzieciństwa. Jak wiemy, każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego, np.

$$\frac{1}{2} = 0,5000\ldots, \quad \frac{1}{3} = 0,333\ldots, \quad \frac{10}{7} = 1,428571428571\ldots, \quad \pi = 3,1415\ldots$$

Zauważmy, że każde takie rozwinięcie to formalnie suma pewnego szeregu. Liczba

$$a_0, a_1a_2a_3\ldots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

Ideałem byłoby, gdyby każda liczba miała dokładnie jeden zapis. Niestety:

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1 = 1,000\ldots$$

Podobnie jest z każdą liczbą o skończonym rozwinięciu dziesiętnym. Liczba taka ma zawsze dwa rozwinięcia nieskończone, np. $0,450000\ldots = 0,44999\ldots$

Wymierna czy niewymierna?

Spójrzmy na przykładowe rozwinięcie okresowe:

$$0,023\,23\,23\ldots = \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \frac{23}{10^7} + \ldots = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{990}.$$

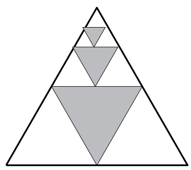
Podobne rachunki pokazują, że każda liczba o rozwinięciu okresowym (i oczywiście każda o rozwinięciu skończonym) jest liczba wymierną.

Ze szkolnego algorytmu zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne łatwo wywnioskować, że albo otrzymamy rozwinięcie skończone albo okresowe. Zatem liczby niewymierne to dokładnie te liczby rzeczywiste, które mają nieskończone nieokresowe rozwinięcia dziesiętne.

Zadania

1. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$.



2. Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego sprawdź, że $0,(37) = 37/99$.

3. Korzystając z rysunku obok wywnioskuj równość

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

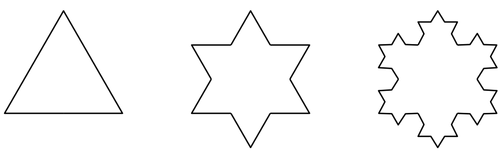
♢ ♢ ♢

4. Niech f_n będzie ciągiem Fibonacciego (p. str. 271). Wykaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$$

jest liczbą wymierną.

5. Na rysunkach pokazano kolejne fazy powstawania tzw. *krzywej Kocha.*



Zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku 1. Każdy z boków dzielimy na trzy równe odcinki. Środkowy usuwamy, a na jego miejsce dodajemy dwa pozostałe boki trójkąta równobocznego. Otrzymana figurę znów modyfikujemy w podobny sposób itd. Jaką długość będzie miała krzywa, jaką otrzymamy powtarzając tę operację nieskończenie wiele razy? Znajdź pole figury ograniczonej tą krzywą.

4.2 Ułamki łańcuchowe

Wprowadzenie - Rozwinięcia łańcuchowe liczb wymiernych - Rozwinięcia łańcuchowe liczb niewymiernych - Redukty i aproksymacje - Zadania

Niejednoznaczność zapisu to tylko jedna z wad zapisu dziesiętnego; drugą jest jego umowność. Gdyby historia potoczyła się inaczej, moglibyśmy stosować zapis sześćdziesiątkowy — jak u Babilończyków — albo system dwunastkowy, pod każdym względem lepszy od dziesiętnego.

Umowność zapisu dziesiętnego powoduje, że informacja typu „17-tą cyfrą rozwinięcia π jest 3" są bez znaczenia. Zapis za pomocą ułamków łańcuchowych ma charakter obiektywny, a w konsekwencji — jak się wkrótce okaże — kolejne cyfry rozwinięcia niosą informację matematycznie znaczącą.

Wprowadzenie

Ułamkiem łańcuchowym nazywamy (skończone bądź nieskończone) wyrażenie postaci

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

gdzie a_0 jest dowolną liczbą naturalną, a dalsze a_i dodatnimi liczbami naturalnymi. Ze względów typograficznych zazwyczaj ułamek taki zapisujemy w postaci

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Zwróć uwagę, że część całkowitą a_0 oddzielamy od dalszych wyrazów średnikiem, a nie przecinkiem.

Sens skończonego ułamka łańcuchowego powinien być jasny, na przykład

$$[1; 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}.$$

Wartość nieskończonego ułamka łańcuchowego określamy jako granicę

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Rozwinięcia łańcuchowe liczb wymiernych

Jest rzeczą oczywistą, że skończony ułamek łańcuchowy przedstawia liczbę wymierną. Na odwrót: każda dodatnia liczba wymierna daje się przedstawić w postaci skończonego ułamka łańcuchowego. Zastanówmy się, dlaczego tak się dzieje. W tym celu przyjrzymy się, jak powstało powyższe rozwinięcie 17/12:

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}.$$

Postępując podobnie możemy znaleźć skończone rozwinięcie łańcuchowe dowolnej liczby wymiernej.

Rozwinięcia łańcuchowe liczb niewymiernych

Dowodzi się, że każdy nieskończony ułamek łańcuchowy ma sens, tzn. jest zbieżny. Na odwrót: każda dodatnia liczba ma rozwinięcie: wymierna skończone, niewymierna nieskończone.

Spójrzmy, jak otrzymać rozwinięcie $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + [\sqrt{3} - 1] = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = \dots$$

Stąd

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots].$$

Zazwyczaj zapisujemy to krócej: $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$.

Redukty i aproksymacje

W podobny sposób można wykazać, że

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Kolejne przybliżenia, powstające przez usunięcie (redukcję) końcowej nieskończonej części ułamka łańcuchowego nazywamy jego **reduktami**.

Początkowe redukty to

$$[1;2] = 3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5, \qquad [1;2,2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,\underline{4}\ldots$$

Następne to 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408,... Kolejne redukty dają coraz lepsze przybliżenia — na przemian z nadmiarem i niedomiarem — szybko zbieżne do wartości dokładnej.

Można zauważyć, że pośród tych reduktów znalazły się też kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ otrzymane (dużo szybciej) za pomocą algorytmu Herona. Choć droga do tych przybliżeń była tu bardziej uciążliwa, to korzystając z ogólnej teorii ułamków łańcuchowych otrzymujemy dodatkową informację.

Dowodzi się, że jeżeli p/q jest reduktem rozwinięcia łańcuchowego pewnej liczby, to jest on najlepszym przybliżeniem tej liczby pośród wszystkich ułamków o mianowniku mniejszym bądź równym q.

Wynika stąd np., że ułamek 577/408 jest najlepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ pośród wszystkich ułamków o mianowniku mniejszym bądź równym 408. Lepsze przybliżenie można otrzymać tylko za cenę zwiększenia mianownika.

Zadania

6. Przedstaw w postaci ułamka łańcuchowego: a) 51/19; b) 233/144.

7. Wyprowadź rozwinięcie łańcuchowe $\sqrt{2}$. Wsk.: Znajdź najpierw rozwinięcie $1 + \sqrt{2}$.

8. Wiedząc, że $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$ znajdź wymierne przybliżenia π na podstawie trzech początkowych reduktów. Porównaj z wartością dokładną $\pi = 3,14159\,26535\ldots$

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

9. Wykaż niewymierność $\sqrt{2}$ wykorzystując jego rozwinięcie w ułamek łańcuchowy. Zauważ, że jest to dowód nie stosujący metody niewprost.

10. Wykaż, że zbiór liczb postaci $[0; \overline{n}]$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$ składa się wyłącznie z liczb niewymiernych. Znajdź jego kresy dolny i górny.

11.* Czy rozwinięcie $\sqrt[3]{3}$ w ułamek łańcuchowy ma okres?

Wykład 5

Przeliczalność, nieprzeliczalność i liczby kardynalne

Liczby naturalne służą do liczenia (jeden, dwa, trzy, ...), do porządkowania (pierwszy, drugi, trzeci, ...), a także — raczej przypadkowo — do mierzenia; np. odległość może wynieść 100 metrów. Jest to rola dość przypadkowa, gdyż przy mierzeniu zawsze pojawiają się one jako zaokrąglenia liczb rzeczywistych.

W latach siedemdziesiątych XIX w. Georg Cantor odkrył, że można rozszerzyć pojęcie liczby naturalnej tak, aby nowe liczby określały liczebność zbiorów nieskończonych (liczby kardynalne) czy też typ uporządkowania takich zbiorów (liczby porządkowe). Dalej zajmiemy się tylko liczbami kardynalnymi.

5.1 Przeliczalność, nieprzeliczalność i hipoteza continuum

Zbiory przeliczalne i przeliczalność zbioru liczb wymiernych - Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych - Hipoteza continuum - Zadania

Z pozoru liczb wymiernych jest dużo więcej niż liczb naturalnych. Jednakże Cantor wykazał, że jest ich tyle samo. Dopiero liczb rzeczywistych jest więcej. Odkrycie to zapoczątkowało rozwój nowej gałęzi matematyki: teorii mnogości.

Zbiory przeliczalne i przeliczalność zbioru liczb wymiernych

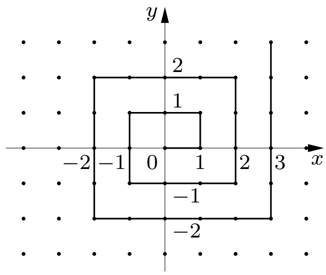
Spójrzmy na poniższe przyporządkowanie:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

Widzimy, że pomiędzy liczbami naturalnymi a całkowitymi istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość: różnym liczbom naturalnym odpowiadają różne liczby całkowite, przy czym każda liczba całkowita ma swój numer.

Jeżeli elementy nieskończonego zbioru A można w podobny sposób ponumerować liczbami naturalnymi, to mówimy, że A jest zbiorem **przeliczalnym**. Tak więc zbiór liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym.

Okazuje się, iż także zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym. Poniższy rysunek pokazuje, jak poruszając się po nieskończonej łamanej możemy obejść kolejno punkty $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$ ....



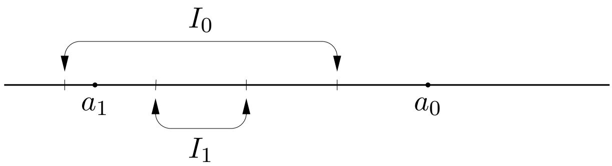
Jeżeli w punkcie (p,q), gdzie $q \neq 0$, umieścimy liczbę p/q, to otrzymamy ponumerowanie wszystkich liczb wymiernych. Jednak niektóre punkty odpowiadają ułamkom wcześniejszym, np. punkty $(4,2)$ i $(2,1)$ odpowiadają temu samemu ułamkowi. Aby otrzymać poprawną numerację liczb wymiernych wystarczy pomijać punkty odpowiadające takim powtórzeniom. W konsekwencji otrzymamy następującą numerację liczb wymiernych:

$$0,\ \frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{-1}=-1,\ \frac{2}{-1}=-2,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}=-\frac{1}{2},\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2},\ -3,\ 3,\dots$$

Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych

Wykażemy teraz, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Ponieważ łatwo wykazać, że suma dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym, więc wynika stąd, iż także liczb niewymiernych jest nieprzeliczalnie wiele.

Przypuśćmy, że zbiór liczb rzeczywistych można ponumerować liczbami naturalnymi, $R = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Niech I_0 będzie dowolnym domkniętym przedziałem długości 1 takim, że $a_0 \notin I_0$. Podzielmy go na trzy przedziały domknięte, jak na rysunku poniżej.



Przynajmniej jeden z nich, nazwijmy go I_1 nie zawiera liczby a_1. Podobnie, dzieląc I_1 znajdziemy I_2 tak, że $a_2 \notin I_2$. Postępując podobnie otrzymujemy ciąg przedziałów, jak w lemacie Cantora, przy czym długość I_n jest równa $1/3^n$. Z lematu Cantora wynika, że istnieje liczba a należąca do części wspólnej tych przedziałów. Jest ona różna od wszystkich liczb a_n, gdyż

$$a \in I_n, \qquad \text{ale} \qquad a_n \notin I_n.$$

Sprzeczność z założeniem, że ciąg a_n zawiera wszystkie liczby rzeczywiste.

Hipoteza continuum

Już Cantor postawił hipotezę — znaną dziś jako **hipoteza continuum** — że każdy nieskończony podzbiór prostej jest przeliczalny albo równoliczny z $\mathbb{R}$. W roku 1963 Paul Joseph Cohen wykazał, że hipoteza ta jest niezależna od standardowych aksjomatów teorii mnogości: wychodząc od podstawowych intuicji pojęcia *zbiór* nie da się ani tej hipotezy udowodnić, ani obalić.

Zadania

1. Zapisz wzorem algebraicznym funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Zapis może zawierać nawias klamrowy.

2. Wykaż, że płaszczyzny nie można pokryć przeliczalnym zbiorem prostych.

3. **Iloczynem** albo **produktem kartezjańskim** zbiorów A, B nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Wykaż, że iloczyn kartezjański dwu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny. Uzasadnij, że podobnie jest dla iloczynu skończenie wielu zbiorów przeliczalnych.

4. Wykaż, że przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Wywnioskuj stąd, że zbiór ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.

♢ ♢ ♢

5. Uzasadnij, że funkcja $f(k,m) = 2^k(2m+1) - 1$ jest bijekcją $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$.

6. Wykaż, że każda rodzina parami rozłącznych otwartych przedziałów prostej jest przeliczalna.

5.2 Liczby kardynalne i twierdzenie Cantora

Równoliczność i liczby kardynalne - Twierdzenie Cantora - Zadania

Skoro nie wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne, to można porównywać ich wielkości. Służą do tego liczby kardynalne.

Równoliczność i liczby kardynalne

Mówimy, że zbiory A oraz B są **równoliczne**, jeżeli istnieje bijekcja (tzn. funkcja różnowartościowa i „na”)

$$f : A \to B.$$

Liczebność — inaczej **moc** — zbioru skończonego wyraża się liczbą naturalną. Moc zbioru pustego to 0, moc zbioru jednoelementowego to 1, itd. **Liczby kardynalne** to moce zbiorów dowolnych. Są nimi zatem liczby 0, 1, 2, 3, ..., ale także moce zbiorów nieskończonych, np.

$$\text{moc } \mathbb{N} = \aleph_0, \ \text{(czyt. alef zero)}, \qquad \text{moc } \mathbb{R} = \mathfrak{c}, \ \text{(czyt. kontinuum)}.$$

Moc zbioru X będziemy oznaczać symbolem $\#X$. Liczby kardynalne można porównywać. Mówimy, że

$$\#A \leqslant \#B,$$

jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \to B$. Naturalnie ostra nierówność $\#A < \#B$ oznacza, że $\#A \leqslant \#B$, ale $\#A \neq \#B$. Dowodzi się, że relacja $\leqslant$ zachowuje się, jak zwykła nierówność. W szczególności, jeżeli $\#A \leqslant \#B$ oraz $\#B \leqslant \#A$, to $\#A = \#B$.

Na liczbach kardynalnych można też wykonywać działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie i potęgowanie. Nie będziemy się tym zajmować, ale odnotujemy jedną z ważnych praw arytmetyki liczb kardynalnych. Dla dowolnych zbiorów nieskończonych A, B

$$\#(A \cup B) = \max(\#A, \#B).$$

Łatwo stąd wywnioskować, że zbiór liczb niewymiernych ma moc continuum (p. zad. 9).

Moc płaszczyzny i innych $\mathbb{R}^n$

Wykażemy teraz, że zbiory punktów prostej i płaszczyzny są równoliczne. Gdy Wacław Sierpiński — jeden z twórców polskiej szkoły matematycznej — odkrył ten zadziwiający fakt, zainteresował się teorią mnogości.

Oczywiście $\#\mathbb{R} \leqslant \#\mathbb{R}^2$. Pozostaje wykazać, że $\#\mathbb{R}^2 \leqslant \#\mathbb{R}$.

Zauważmy najpierw, że prosta $\mathbb{R}$ jest równoliczna z przedziałem $(0,1)$. Istotnie, żądaną bijekcją jest

$$\operatorname{ctg} \pi x : (0,1) \to \mathbb{R}.$$

Wystarczy zatem, gdy pokażemy, że $\#(0,1)^2 \leqslant \#(0,1)$. Odpowiednim przekształceniem różnowartościowym jest

$$(0,a_1a_2a_3\ldots,\ 0,b_1b_2b_3\ldots) \to 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

Tak więc płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem mocy continuum. W podobny sposób dowodzi się, iż także inne przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ są mocy continuum.

Twierdzenie Cantora

Czyżby zatem istniały tylko dwie nieskończone liczby kardynalne? Nie, z twierdzenia Cantora wynika, że jest ich nieskończenie wiele.

Dowód poniższego zasadniczego twierdzenia nawiązuje do sławnego paradoksu kłamcy. Zastanów się, czy zdanie „To zdanie jest fałszywe” jest zdaniem prawdziwym czy fałszywym.

Twierdzenie 5.1 (Cantora)
Dla dowolnego zbioru X zachodzi nierówność

$$\#X < \#P(X),$$

gdzie $P(X)$ to rodzina wszystkich podzbiorów X.

Dowód: Oczywiście $\#X \leqslant \#P(X)$. Wystarczy zatem wykazać, że żadna funkcja $f : X \to P(X)$ nie jest surjekcją. W tym celu rozważmy podzbiór

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Przypuśćmy, że f jest surjekcją, zatem $A = f(a)$ dla pewnego $a \in X$. Wówczas

$$a \in A \Longleftrightarrow a \notin f(a) \Longleftrightarrow a \notin A.$$

Zatem a należy do A wtedy i tylko wtedy, gdy a nie należy do A. Sprzeczność.

Jeżeli X ma moc $\mathfrak{m}$, to moc $P(X)$ oznaczana jest symbolem $2^{\mathfrak{m}}$. Dowodzi się, że $\#P(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$, czyli $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Zadania

7. Wykaż, że każdy przedział otwarty (a, b) jest równoliczny z przedziałem $(0, 1)$, a więc ma moc $\mathfrak{c}$. Wywnioskuj stąd, że tę samą moc mają też inne niejednopunktowe przedziały.

8. Wskaż injekcję $f : X \to P(X)$.

9. Wykaż, że zbiór liczb niewymiernych ma moc continuum.

10. Czy istnieje zbiór o mocy większej niż moc N, $P(N)$, $P(P(N)$ itd.?

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

11. Uzasadnij, że $|A| \leqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f : B \to A$.

12.* Nieskończone podzbiory $\mathbb{N}$ nazwiemy prawie rozłącznymi, jeżeli ich część wspólna jest zbiorem skończonym. Wykaż, że istnieje rodzina mocy $\mathfrak{c}$ nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ parami prawie rozłącznych.

5.3 O liczbach przestępnych

Liczby algebraiczne i liczby przestępne - Dowód istnienia liczb przestępnych - Zadanie

Liczby kardynalne są interesujące i ważne same przez się, ale już pierwsza praca Cantora na ich temat pokazała ich znaczenie dla innych działów matematyki. Cantor wykazał w niej, że większość liczb rzeczywistych to liczby przestępne.

Liczby algebraiczne i liczby przestępne

Liczbę będącą pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych nazywamy **algebraiczną**. Wszystkie liczby wymierne, a także $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ są przykładami liczb algebraicznych. Liczby nie będące algebraicznymi nazywamy **przestępnymi**. Już pod koniec XVIII w. przypuszczano, że istnieją liczby przestępne. Pierwszy przykład podał w roku 1844 Joseph Liouville, ale była to liczba sztucznie w tym celu skonstruowana. W roku 1873 Charles Hermite wykazał, że liczbą przestępna jest podstawa logarytmu naturalnego e, w roku 1882 Ferdinand Lindemann wykazał przestępność π. Każdy taki dowód jest dość trudny.

Dowód istnienia liczb przestępnych

Jednak nietrudno wykazać, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny, a więc większość liczb rzeczywistych to liczby przestępne.

Niezerowemu wielomianowi $w(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych przyporządkujmy jego rangę

$$|a_n| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n.$$

Na przykład wielomiany stałe 1 oraz -1 mają rangę 1, wielomiany x, $-x$, 2, -2 rangę 2, a wielomiany

$$x^2,\ -x^2,\ 2x,\ -2x,\ x+1,\ x-1,\ -x+1,\ -x-1,\ 3,\ -3$$

rangę 3. Nietrudno zauważyć, że wielomianów o współczynnikach całkowitych ustalonej rangi jest skończenie wiele. Niech A_n oznacza zbiór pierwiastków wszystkich wielomianów rangi n. Każdy z tych zbiorów jest skończony, gdyż niezerowy wielomian ma skończenie wiele pierwiastków.

Zbiór liczb algebraicznych to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pozostaje zauważyć, że przeliczalna suma zbiorów skończonych jest zbiorem przeliczalnym. Istotnie, ustawiając w ciąg kolejne elementy zbiorów A_1, A_2, A_3, ... wyznaczamy pewną numerację wszystkich elementów tej sumy.

Zadania

13. Wykaż, że każda z podanych liczb jest algebraiczna:
a) $1+\sqrt{2}$; b) $1+\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; d) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

14. Jakiej mocy jest zbiór liczb przestępnych?

15. Wiedząc, że e oraz π są liczbami przestępnymi wykaż, iż przynajmniej jedna z liczb $e+\pi$ oraz $e\pi$ jest niewymierna.

5.4 Cantor

Georg Cantor (1845-1918), uczeń Weierstrassa. Od roku 1872 aż do śmierci profesor dość prowincjonalnego uniwersytetu w Halle. Starania o profesurę w Berlinie były konsekwentnie blokowane przez Kroneckera, który wyraźnie nie rozumiał znaczenia prac Cantora. Był matematykiem bardzo aktywnym społecznie. Współtworzył i był pierwszym przewodniczącym Stowarzyszenia Matematyków Niemieckich (1890-93). Od połowy lat osiemdziesiątych zaczyna sporadycznie popadać w głęboką depresję. Zmarł w klinice psychiatrycznej.

Do historii matematyki przeszedł głównie jako twórca teorii mnogości. Dwa podstawowe jego odkrycia to nieprzeliczalność $\mathbb{R}$ i dowód równoliczności prostej z płaszczyzną. Ten ostatni wynik doprowadził do powstania teorii wymiaru. Cantor jest też autorem jednej z dwu podstawowych formalizacji liczb rzeczywistych.